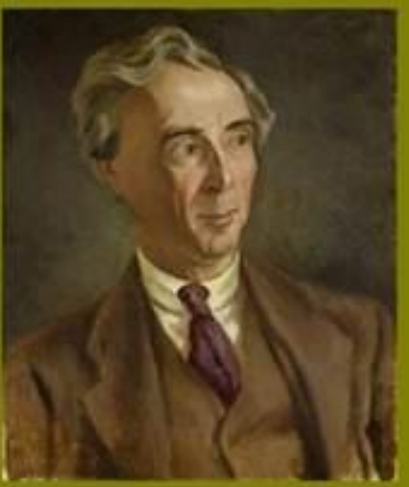
Introduction to Mathematical Philosophy



by

BERTRAND RUSSELL

LONDON: GEORGE ALLEN & UNWIN, LTD. / NEW YORK: THE MACMILLAN CO.
First Published May 1919. Second Edition April 1920.

Introduzione alla matematica

Filosofia

di

Bertrand Russell

Originariamente pubblicato da

George Allen & Unwin, Ltd., Londra. Maggio 1919. *Versione* online corretta 1.0 (5 febbraio 2010) , basata sulla "seconda edizione" (seconda ristampa) dell'aprile 1920 , con correzioni aggiuntive evidenziate in verde .

[La descrizione di Russell tratta dalla sovraccoperta originale:]

Questo libro è pensato per coloro che non hanno alcuna conoscenza pregressa degli argomenti trattati e non possiedono una preparazione matematica superiore a quella acquisita nella scuola primaria o persino a Eton. Espone in forma elementare la definizione logica di numero, l'analisi del concetto di ordine, la moderna dottrina dell'infinito e la teoria delle descrizioni e delle classi come finzioni simboliche. Gli aspetti più controversi e incerti della materia sono subordinati a quelli che ormai possono essere considerati nozioni scientifiche consolidate. Questi ultimi vengono spiegati senza l'uso di simboli, ma in modo tale da fornire ai lettori una comprensione generale dei metodi e degli scopi della logica matematica, che, si spera, sarà di interesse non solo per coloro che desiderano approfondire lo studio della materia,

ma anche per quella più ampia cerchia di persone che desiderano conoscere i fondamenti di questa importante scienza moderna.

Contenuto

Indice iv

Prefazione
..... vi

Nota dell'editore
..... ix

I. La serie dei numeri naturali . . . 1

II. Definizione di numero 18

III. Finitezza e induzione matematica 32

IV. La definizione di ordine 26

V. Tipi di relazioni 68

VI. Somiglianza delle relazioni 83

VII. Numeri razionali, reali e complessi 101

VIII. Numeri cardinali infiniti 124

IX. Serie infinite e ordinali . . . . . ???

X. Limiti e continuità 156

XI. Limiti e continuità delle funzioni . 171 XII. Selezioni e l'asse moltiplicativo-

iom . . . . . ???

XIII. L'assioma dell'infinito e i tipi logici 210

XIV. Incompatibilità e la teoria della De-

duzione . . . . . 230 XV. Funzioni proposizionali 248

XVI. Descrizioni 267

XVII. Classi 289

XVIII. Matematica e logica 311

Indice . . . . . 331 Appendice: Modifiche all'edizione online 338

Prefazione

Questo libro è concepito essenzialmente come un'"Introduzione" e non si propone di fornire una trattazione esaustiva dei problemi che affronta. È sembrato opportuno esporre alcuni risultati, finora accessibili solo a coloro che padroneggiano il simbolismo logico, in una forma che offra il minimo di difficoltà al principiante. Si è fatto il massimo sforzo per evitare il dogmatismo su questioni ancora oggetto di seri dubbi, e questo sforzo ha in qualche misura influenzato la scelta degli argomenti trattati. Gli inizi della logica matematica sono meno noti con certezza rispetto alle sue parti successive, ma rivestono almeno pari interesse filosofico. Gran parte di ciò che viene esposto nei capitoli seguenti non può essere propriamente definito "filosofia", sebbene le questioni in questione siano state incluse nella filosofia finché non ne esisteva una scienza soddisfacente. La natura dell'infinito e della continuità, ad esempio, apparteneva in passato alla filosofia, ma ora appartiene alla matematica. *La filosofia* matematica , in senso stretto, non può forse essere considerata comprensiva di risultati scientifici definiti come quelli ottenuti in questo campo; Ci si aspetta naturalmente che la filosofia della matematica si occupi di questioni di frontiera della conoscenza, sulle quali non si è ancora raggiunta una certezza comparativa. Ma la speculazione su tali questioni difficilmente risulterà fruttuosa se non si conoscono gli aspetti più scientifici dei principi matematici. Un libro che tratta di questi aspetti può quindi pretendere di essere un'introduzione *alla* filosofia matematica, sebbene difficilmente possa affermare, salvo quando esce dal suo ambito, di trattare

effettivamente una parte della filosofia. Si occupa, tuttavia , di un corpus di conoscenze che, per coloro che lo accettano, sembra invalidare gran parte della filosofia tradizionale, e persino buona parte di ciò che è attualmente in voga. In questo modo, oltre che per la sua rilevanza su problemi ancora irrisolti, la logica matematica è rilevante per la filosofia. Per questa ragione, oltre che per l'intrinseca importanza della materia, può essere utile una sintetica esposizione dei principali risultati della logica matematica in una forma che non richieda né una conoscenza della matematica né una predisposizione per il simbolismo matematico.

Qui, tuttavia, come altrove, il metodo è più importante dei risultati, dal punto di vista di ulteriori ricerche; e il metodo non può essere ben spiegato nell'ambito di un libro come quello che segue. È auspicabile che alcuni lettori siano sufficientemente interessati da approfondire lo studio del metodo con cui la logica matematica può essere utilizzata per indagare i problemi tradizionali della filosofia. Ma questo è un argomento che le pagine seguenti non hanno cercato di trattare.

BERTRAND RUSSELL.

Nota dell'editore

[La nota seguente è stata scritta da JH Muirhead, vii LL.D., curatore della collana Library of Philosophy in cui fu originariamente pubblicato *Introduction to Mathematical Philosophy* .]

Coloro che, basandosi sulla distinzione tra filosofia matematica e filosofia della matematica, ritengono che questo libro sia fuori luogo nella presente biblioteca, possono fare riferimento a quanto l'autore stesso afferma a questo proposito nella prefazione. Non è necessario concordare con quanto egli suggerisce in merito al riadattamento del campo della filosofia mediante il trasferimento alla matematica di problemi quali quelli di classe, continuità e infinito, per comprendere la rilevanza delle definizioni e delle discussioni che seguono per l'opera della "filosofia tradizionale". Se i filosofi non possono acconsentire a relegare la critica di queste categorie a una delle scienze specifiche, è comunque essenziale che conoscano il significato preciso che la scienza della matematica, in cui questi concetti rivestono un ruolo così importante, attribuisce loro. Se, d'altra parte, vi sono matematici ai quali queste definizioni e discussioni sembrano un'elaborazione e una complicazione di concetti semplici, è forse opportuno ricordare loro, dal punto di vista filosofico, che qui come altrove, l'apparente semplicità può celare una complessità che spetta a qualcuno, sia esso un filosofo o un matematico, o, come l'autore di questo volume, entrambi, svelare.

Capitolo I La serie dei numeri naturali

La matematica è una disciplina che, partendo dalle sue parti più familiari, può essere perseguita in due direzioni opposte. La direzione più familiare è costruttiva, verso una complessità gradualmente crescente: dagli interi alle frazioni, ai numeri reali, ai numeri complessi; dall'addizione e moltiplicazione alla derivazione e integrazione, fino alla matematica superiore. L'altra direzione, meno familiare, procede, attraverso l'analisi, verso una sempre maggiore astrazione e semplicità logica; invece di chiedersi cosa si possa definire e dedurre da ciò che si assume all'inizio, ci si chiede quali idee e principi più generali si possano trovare, in base ai quali ciò che è stato il nostro punto di partenza possa essere definito o dedotto. È proprio il perseguire questa direzione opposta che caratterizza la filosofia matematica in contrapposizione alla matematica ordinaria. Ma va precisato che la distinzione non risiede nell'oggetto di studio, bensì nello stato d'animo di chi la indaga. I primi geometri greci, passando dalle regole empiriche della topografia egizia alle proposizioni generali con cui tali regole si dimostravano giustificabili, e da lì agli assiomi e ai postulati di Euclide, si dedicavano alla filosofia matematica, secondo la definizione sopra riportata; ma una volta raggiunti gli assiomi e i postulati, il loro impiego deduttivo, come lo troviamo in Euclide, apparteneva alla matematica nel senso ordinario del termine. La distinzione tra matematica e filosofia matematica dipende dall'interesse che ispira la ricerca e dallo stadio raggiunto dalla ricerca stessa, non dalle proposizioni di cui la ricerca si occupa.

Possiamo esprimere la stessa distinzione in un altro modo. Le cose più ovvie e semplici in matematica non sono quelle che logicamente si trovano all'inizio, bensì quelle che, dal punto di vista della deduzione logica, si collocano in una posizione intermedia. Così come i corpi più facili da osservare sono quelli che non sono né troppo vicini né troppo lontani, né troppo piccoli né troppo grandi, allo stesso modo i concetti più facili da comprendere sono quelli che non sono né troppo complessi né troppo semplici (usando "semplice" in senso *logico*). E come abbiamo bisogno di due tipi di strumenti, il telescopio e il microscopio, per ampliare le nostre capacità visive, allo stesso modo abbiamo bisogno di due tipi di strumenti per ampliare le nostre capacità logiche: uno per progredire verso la matematica superiore, l'altro per tornare indietro ai fondamenti logici delle cose che tendiamo a dare per scontate in matematica. Scopriremo che analizzando le nostre nozioni matematiche ordinarie acquisiamo nuove intuizioni, nuove capacità e i mezzi per raggiungere interi nuovi ambiti matematici, adottando nuove linee di progresso dopo il nostro viaggio a ritroso. Lo scopo di questo libro è spiegare la filosofia matematica in modo semplice e non tecnico, senza soffermarsi su quelle parti che sono così dubbie o difficili che un trattamento elementare è a malapena possibile. Un trattamento completo si trova nei *Principia Mathematica* ; [1] il trattamento in questo volume è inteso solo come un'introduzione.

Per la persona media istruita dei giorni nostri, il punto di partenza ovvio della matematica sarebbe la serie dei numeri interi,

1 , 2 , 3 , 4 , ... ecc. |

Probabilmente solo una persona con una certa conoscenza matematica (≥ 3) penserebbe di iniziare con 0 invece che con 1 , ma presupporremo questo livello di conoscenza; prenderemo come punto di partenza la serie:

0 , 1 , 2 , 3 , ... *n, n* + 1 , ...

Ed è a questa serie che ci riferiremo quando parleremo di “serie dei numeri naturali”.

Solo in una fase avanzata della civiltà abbiamo potuto prendere questa serie come punto di partenza. Devono essere occorsi molti secoli per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni erano entrambi esempi del numero 2 : il grado di astrazione richiesto è tutt'altro che semplice. E la scoperta che 1 è un numero deve essere stata difficile . Quanto a 0 , è un'aggiunta molto recente; i Greci e i Romani non avevano una cifra simile. Se avessimo intrapreso la filosofia matematica in tempi più antichi, avremmo dovuto iniziare con qualcosa di meno astratto della serie dei numeri naturali, che dovremmo raggiungere come tappa del nostro viaggio a ritroso. Quando i fondamenti logici della matematica saranno diventati più familiari, saremo in grado di partire da un punto ancora più remoto, in quella che ora è una fase avanzata della nostra analisi. Ma per il momento i numeri naturali sembrano rappresentare ciò che è più semplice e familiare in matematica.

Ma, pur essendo familiari, non vengono compresi. Pochissime persone sono preparate con una definizione di cosa si intenda per "numero", o " 0 ", o " 1 ". Non è molto difficile vedere che, partendo da 0 , qualsiasi altro numero naturale può essere raggiunto mediante ripetute aggiunte di 1 , ma dovremo definire cosa intendiamo per "aggiungere 1 " e cosa intendiamo per "ripetuto". Queste domande non sono affatto facili. Fino a poco tempo fa si credeva che almeno alcune di queste prime nozioni di aritmetica dovessero essere accettate come troppo semplici e primitive per essere definite. Poiché tutti i termini che vengono definiti sono definiti per mezzo di altri termini, è chiaro che la conoscenza umana deve sempre accontentarsi di accettare alcuni termini come intelligibili senza definizione, per avere un punto di partenza per le sue definizioni. Non è chiaro che debbano esistere termini incapaci *di* definizione: è possibile che, per quanto indietro si vada nella definizione, si *possa* sempre andare ancora più indietro. D'altra parte, è anche possibile che, spingendo l'analisi sufficientemente oltre, si possano raggiungere termini realmente semplici, e quindi logicamente incapaci di quel tipo di definizione che consiste nell'analizzare. Non è necessario che noi ci pronunciamo su questa questione; ai nostri fini è sufficiente osservare che, poiché le capacità umane sono finite, le definizioni a noi note devono sempre iniziare da qualche parte, con termini al momento non definiti, anche se forse non in modo permanente.

Tutta la matematica pura tradizionale, inclusa la geometria analitica, può essere considerata come costituita interamente da proposizioni sui numeri naturali. Vale a dire, i termini che

compaiono possono essere definiti per mezzo dei numeri naturali e le proposizioni possono essere dedotte dalle proprietà dei numeri naturali, con l'aggiunta, in entrambi i casi, delle idee e delle proposizioni della logica pura.

Che tutta la matematica pura tradizionale possa essere derivata dai numeri naturali è una scoperta piuttosto recente, sebbene se ne sospettasse da tempo. Pitagora, il quale credeva che non solo la matematica, ma ogni altra cosa potesse essere dedotta dai numeri, fu lo scopritore dell'ostacolo più serio sulla via di quella che viene chiamata "aritmetizzazione" della matematica. Fu Pitagora a scoprire l'esistenza degli incommensurabili e, in particolare, l'incommensurabilità del lato di un quadrato e della diagonale. Se la lunghezza del lato è di 1 pollice, il numero di pollici sulla diagonale è la radice quadrata di 2 , che apparentemente non era un numero. Il problema così posto è stato risolto solo ai giorni nostri, e solo *grazie* alla riduzione dell'aritmetica alla logica, che verrà spiegata nei capitoli successivi. Per ora, daremo per scontata l'aritmetizzazione della matematica, sebbene questa sia stata un'impresa di enorme importanza.

Avendo ridotto tutta la matematica pura tradizionale alla teoria dei numeri naturali, il passo successivo nell'analisi logica fu quello di ridurre la teoria stessa al più piccolo insieme di premesse e termini indefiniti da cui potesse essere derivata. Questo lavoro fu compiuto da Peano. Egli dimostrò che l'intera teoria dei numeri naturali poteva essere derivata da tre idee

primitive e cinque proposizioni primitive, oltre a quelle della logica pura. Queste tre idee e cinque proposizioni divennero così, per così dire, ostaggi dell'intera matematica pura tradizionale. Se potevano essere definite e dimostrate in termini di altre, lo stesso valeva per tutta la matematica pura. Il loro "peso" logico, se si può usare tale espressione, è pari a quello dell'intera serie di scienze che sono state dedotte dalla teoria dei numeri naturali; la verità di tutta questa serie è assicurata se è garantita la verità delle cinque proposizioni primitive, a condizione, ovviamente, che non vi sia nulla di errato nell'apparato puramente logico che è anch'esso coinvolto. L'opera di Peano facilita in modo straordinario il lavoro di analisi matematica.

Le tre idee primitive dell'aritmetica di Peano sono:

0 , numero, successore .

Per “successore” intende il numero successivo nell’ordine naturale. Vale a dire, il successore di 0 è 1 , il successore di 1 è 2 , e così via. Per “numero” intende, in questo contesto, la classe dei numeri naturali. [2] Non sta presupponendo che conosciamo tutti i membri di questa classe, ma solo che sappiamo cosa intendiamo quando diciamo che questo o quello è un numero, proprio come sappiamo cosa intendiamo quando diciamo “Jones è un uomo”, anche se non conosciamo tutti gli uomini individualmente.

Le cinque proposizioni primitive che Peano presuppone sono:

(1) 0 è un numero.

(2) Il successore di qualsiasi numero è un numero.

(3) Nessun numero ha lo stesso successore di un altro. |

(2) 0 non è il successore di alcun numero. 6 (5) Qualsiasi proprietà che appartiene a 0 , e anche al successore di ogni numero che possiede tale proprietà, appartiene a tutti i numeri.

L'ultimo di questi è il principio di induzione matematica. Parleremo ampiamente di induzione matematica in seguito; per ora, ci occuperemo solo di esso nel modo in cui compare nell'analisi dell'aritmetica di Peano.

Consideriamo brevemente il modo in cui la teoria dei numeri naturali deriva da queste tre idee e cinque proposizioni. Per cominciare, definiamo 1 come "il successore di 0 ", 2 come "il successore di 1 ", e così via. Possiamo ovviamente continuare all'infinito con queste definizioni, poiché, in virtù di (2), ogni numero che raggiungiamo avrà un successore e, in virtù di (3), questo non può essere nessuno dei numeri già definiti, perché, se lo fosse, due numeri diversi avrebbero lo stesso successore; e in virtù di (4) nessuno dei numeri che raggiungiamo nella serie dei successori può essere 0. Pertanto, la serie dei successori ci fornisce una serie infinita di numeri sempre nuovi. In virtù di (⍰) tutti i numeri appartengono a questa serie, che inizia con 0 e prosegue attraverso i successori successivi: poiché (*a*) 0 appartiene a questa serie, e (*b*) se un numero *n* appartiene ad essa, così fa anche il suo successore, da cui, per induzione matematica, ogni numero appartiene alla serie.

Supponiamo di voler definire la somma di due numeri. Prendendo un numero *m* qualsiasi , definiamo *m* + 0 come *m* e *m* + (*n* + 1) come il successore di *m* + *n* . In virtù di (5), questo ci fornisce una definizione della somma di *m* e *n* , qualunque sia il numero *n* . Allo stesso modo possiamo definire il prodotto di due numeri qualsiasi. Il lettore può facilmente convincersi che qualsiasi proposizione elementare ordinaria dell'aritmetica può essere dimostrata per mezzo delle nostre cinque premesse, e se ha qualche difficoltà può trovare la dimostrazione in Peano.

È giunto il momento di esaminare le considerazioni che rendono necessario superare il punto di vista di Peano, che rappresenta l'ultima perfezione dell '"aritmetizzazione" della matematica, per approdare a quello di Frege, che per primo riuscì a "logicizzare" la matematica, *ovvero* a ridurre alla logica le nozioni aritmetiche che i suoi predecessori avevano dimostrato essere sufficienti per la matematica. In questo capitolo non forniremo la definizione di numero e di numeri particolari di Frege, ma illustreremo alcune delle ragioni per cui il trattamento di Peano è meno definitivo di quanto sembri.

In primo luogo, le tre idee primitive di Peano — vale a dire “ 0 ”, “numero” e “successore” — sono suscettibili di un numero infinito di interpretazioni diverse , tutte in grado di soddisfare le cinque proposizioni primitive. Forniremo alcuni esempi.

(1) Sia “ 0 ” inteso come 100 , e sia “numero” inteso come i numeri da 100 in poi nella serie dei numeri naturali. Allora tutte le nostre proposizioni primitive sono soddisfatte, anche la quarta,

perché, sebbene 100 sia il successore di 99 , 99 non è un “numero” nel senso che stiamo ora dando alla parola “numero”. È ovvio che qualsiasi numero può essere sostituito a 100 in questo esempio.

(2) Sia “ 0 ” il suo significato usuale, ma sia “numero” ciò che di solito chiamiamo “numeri pari”, e sia il “successore” di un numero ciò che risulta dall’aggiunta di due ad esso. Quindi “ 1 ” rappresenterà il numero due, “ 2 ” rappresenterà il numero quattro, e così via; la serie di “numeri” ora sarà

0 , due, quattro, sei, otto ...

Tutte e cinque le premesse di Peano sono ancora soddisfatte.

(3) Sia “ 0 ” il numero uno, sia “numero” l’insieme

1 , 12 , 14 , 18 , 161 , ...

e sia “successore” il significato di “metà”. Allora tutti e cinque gli assiomi di Peano saranno veri per questo insieme.

È chiaro che tali esempi potrebbero essere moltiplicati all'infinito. Infatti, data una qualsiasi serie

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots |$

che è infinito, non contiene ripetizioni, ha un inizio e non ha termini che non possono essere raggiunti dall'inizio in un numero finito di passi, abbiamo un insieme di termini che verificano gli assiomi di Peano. Questo è facilmente visibile, anche se la dimostrazione formale è un po' lunga. Sia " 0 " il numero $_{x0}$, sia

"numero" l'intero insieme di termini e sia il "successore" $_{\text{di}} x n_{il}$ numero $x n_{+1.}$ Allora

(1) " 0 è un numero," *cioè* x_0 è un elemento dell'insieme.

(2) "Il successore di qualsiasi numero è un numero" *, cioè* prendendo un qualsiasi termine x_n nell'insieme, x_{n+1} è anch'esso nell'insieme.

(3) "Nessun numero ha lo stesso successore di un altro", *cioè* se x_m e x_n sono due elementi diversi dell'insieme, x_{m+1} e x_{n+1} sono diversi ; questo deriva dal fatto che (per ipotesi) non ci sono ripetizioni nell'insieme.

( ) " 0 non è il successore di alcun numero", *cioè* nessun termine nell'insieme precede x_0 .

( ) Questo diventa: Qualsiasi proprietà che appartiene a x_0 e appartiene a x_{n+1} a condizione che appartenga a x_n , appartiene a tutti gli x .

Ciò deriva dalla proprietà corrispondente per i numeri.

Una serie della forma

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$

Una progressione è detta serie in cui esiste un primo termine, un successore per ogni termine (in modo che non ci sia un ultimo termine), nessuna ripetizione e ogni termine può essere raggiunto dall'inizio in un numero finito di passaggi . Le progressioni sono di grande importanza nei principi della matematica. Come abbiamo

appena visto, ogni progressione verifica i cinque assiomi di Peano. Si può dimostrare, viceversa, che ogni serie che verifica i cinque assiomi di Peano è una progressione. Pertanto, questi cinque assiomi possono essere usati per definire la classe delle progressioni: "progressioni" sono "quelle serie che verificano questi cinque assiomi". Qualsiasi progressione può essere considerata la base della matematica pura: possiamo dare il nome " ∞ " al suo primo termine, il nome "numero" all'intero insieme dei suoi termini e il nome "successore" al successivo nella progressione. La progressione non deve necessariamente essere composta da numeri: può essere composta da punti nello spazio, o istanti di tempo, o qualsiasi altro termine di cui vi sia una fornitura infinita. Ogni diversa progressione darà luogo a una diversa interpretazione di tutte le proposizioni della matematica pura tradizionale; tutte queste possibili interpretazioni saranno ugualmente vere.

Nel sistema di Peano non c'è nulla che ci permetta di distinguere tra queste diverse interpretazioni delle sue idee primitive. Si presume che sappiamo cosa si intende con “ ” , e che non supporremo che questo simbolo significhi 100 o l'Ago di Cleopatra o qualsiasi altra cosa che potrebbe significare.

Questo punto, ovvero che “ 0 ”, “numero” e “successore” non possono essere definiti per mezzo dei cinque assiomi di Peano, ma devono essere compresi indipendentemente, è importante. Vogliamo che i nostri numeri non servano semplicemente a verificare le formule matematiche, ma che si applichino

correttamente agli oggetti comuni. Vogliamo avere dieci dita, due occhi e un naso. Un sistema in cui “ 1 ” significasse 100 , “ 2 ” significasse 101 e così via, potrebbe andare bene per la matematica pura, ma non sarebbe adatto alla vita quotidiana. Vogliamo che “ 0 ”, “numero” e “successore” abbiano significati che ci diano la giusta considerazione di dita, occhi e nasi. Abbiamo già una certa conoscenza (sebbene non sufficientemente articolata o analitica) di cosa intendiamo per “ 1 ”, “ 2 ” e così via, e il nostro uso dei numeri in aritmetica deve conformarsi a questa conoscenza. Non possiamo garantire che ciò avvenga con il metodo di Peano; tutto ciò che possiamo fare, se adottiamo il suo metodo, è dire "sappiamo cosa intendiamo per ' 0 ', 'numero' e 'successore', anche se non possiamo spiegare cosa intendiamo in termini di altri concetti più semplici". È del tutto legittimo dirlo quando è necessario, e a *un certo* punto tutti dobbiamo farlo; ma l'obiettivo della filosofia matematica è rimandare il più a lungo possibile questa affermazione. Grazie alla teoria logica dell'aritmetica siamo in grado di rimandarla per un tempo molto lungo.

Si potrebbe suggerire che, invece di definire “ ∞ ”, “numero” e “successore” come termini di cui conosciamo il significato pur non potendo definirli, potremmo farli rappresentare tre qualsiasi *termini* 10 che verificano i cinque assiomi di Peano. In tal caso, non sarebbero più termini con un significato definito ma indefinito: sarebbero “variabili”, termini sui quali formuliamo determinate ipotesi, ovvero quelle enunciate nei cinque assiomi, ma che altrimenti sono indeterminate. Se adottassimo questo

piano, i nostri teoremi non sarebbero dimostrati rispetto a un insieme determinato di termini chiamati “numeri naturali”, ma rispetto a tutti gli insiemi di termini aventi determinate proprietà. Tale procedura non è fallace; anzi, per certi scopi rappresenta una valida generalizzazione. Ma da due punti di vista non fornisce una base adeguata per l'aritmetica. In primo luogo, non ci permette di sapere se esistono insiemi di termini che verificano gli assiomi di Peano; Non offre nemmeno il più vago suggerimento su come scoprire se tali insiemi esistano. In secondo luogo, come già osservato, vogliamo che i nostri numeri siano tali da poter essere usati per contare oggetti comuni, e ciò richiede che i nostri numeri abbiano un significato *definito* , non semplicemente che possiedano determinate proprietà formali. Questo significato definito è definito dalla teoria logica dell'aritmetica.

Capitolo II Definizione di numero

La domanda “Che cos’è un numero?” è una domanda che è stata posta spesso nel 11 , ma a cui è stata data una risposta corretta solo ai nostri tempi. La risposta fu fornita da Frege nel 1884 , nei suoi *Grundlagen der Arithmetik* . [3] Sebbene questo libro sia piuttosto breve, non difficile e di altissima importanza, non attirò quasi nessuna attenzione e la definizione di numero che contiene rimase praticamente sconosciuta fino a quando non fu riscoperta dal presente autore nel 1901 .

Nel cercare una definizione di numero, la prima cosa da chiarire è ciò che potremmo definire la grammatica della nostra indagine. Molti filosofi, quando tentano di definire il numero, in realtà si propongono di definire la pluralità, che è una cosa ben diversa . Il *numero* è ciò che caratterizza i numeri, così come *l'uomo* è ciò che caratterizza gli uomini. Una pluralità non è un'istanza di numero, ma di un numero particolare. Un trio di uomini, ad esempio, è un'istanza del numero 3 , e il numero 3 è un'istanza di numero; ma il trio non è un'istanza di numero. Questo punto può sembrare elementare e quasi superfluo da menzionare; eppure si è rivelato troppo sottile per i filosofi, con poche eccezioni.

Un determinato numero non è identico a nessun insieme di termini che abbiano quel numero: il numero 3 non è identico al trio formato da Brown, 12 Jones e Robinson. Il numero 3 è qualcosa che tutti i trii hanno in comune e che li distingue dagli altri insiemi. Un numero è qualcosa che caratterizza certi insiemi, vale a dire quelli che hanno quel numero.

Anziché parlare di "collezione", di norma useremo il termine "classe" o, talvolta, "insieme". Altri termini usati in matematica per indicare la stessa cosa sono "aggregato" e "varietà". Parleremo molto più avanti delle classi. Per ora, ci limiteremo a poche parole. Tuttavia, ci sono alcune osservazioni che è necessario fare subito.

Una classe o una collezione può essere definita in due modi che a prima vista sembrano piuttosto distinti. Possiamo enumerarne i membri, come quando diciamo: "La collezione a cui mi riferisco è Brown, Jones e Robinson". Oppure possiamo menzionare una proprietà che la definisce, come quando parliamo di "umanità" o "gli abitanti di Londra". La definizione che enumera è detta definizione per "estensione", mentre quella che menziona una proprietà che la definisce è detta definizione per "intensione". Di questi due tipi di definizione, quella per intensione è logicamente più fondamentale. Ciò è dimostrato da due considerazioni: (1) che la definizione per estensione può sempre essere ridotta a una per intensione; (2) che quella per intensione spesso non può essere ridotta a quella per estensione nemmeno teoricamente. Ciascuno di questi punti necessita di una spiegazione.

(1) Brown, Jones e Robinson possiedono tutti una certa proprietà che nessun altro possiede in tutto l'universo, vale a dire la proprietà di essere Brown, Jones o Robinson. Questa proprietà può essere usata per dare una definizione per estensione della classe composta da Brown, Jones e Robinson. Consideriamo una formula come " *x* è Brown o *x* è Jones o *x* è Robinson". Questa

formula sarà vera solo per tre *x* , vale a dire Brown, Jones e Robinson. In questo senso assomiglia a un'equazione cubica con le sue tre radici. Può essere considerata come l'assegnazione di una proprietà comune ai membri della classe composta da questi tre uomini , e peculiare a loro . Un trattamento simile può ovviamente essere applicato a qualsiasi altra classe data per estensione.

(2) È ovvio che in pratica possiamo spesso sapere molto su una classe senza essere in grado di enumerarne i membri. Nessun uomo potrebbe effettivamente enumerare tutti gli uomini, o persino tutti gli abitanti di Londra, eppure si sa molto su ciascuna di queste classi. Questo è sufficiente a dimostrare che la definizione per estensione non è *necessaria* per la conoscenza di una classe. Ma quando consideriamo classi infinite, scopriamo che l'enumerazione non è nemmeno teoricamente possibile per esseri che vivono solo per un tempo finito. Non possiamo enumerare tutti i numeri naturali: sono 0 , 1 , 2 , 3 e *così via* . A un certo punto dobbiamo accontentarci di "e così via". Non possiamo enumerare tutte le frazioni o tutti i numeri irrazionali, o tutti gli elementi di qualsiasi altra collezione infinita. Pertanto, la nostra conoscenza riguardo a tutte queste collezioni può essere derivata solo da una definizione per estensione.

Queste osservazioni sono rilevanti, quando cerchiamo la definizione di numero, in tre modi diversi . In primo luogo, i numeri stessi formano una collezione infinita e non possono quindi essere definiti per enumerazione. In secondo luogo, le collezioni

aventi un dato numero di elementi presumibilmente formano a loro volta una collezione infinita: si deve presumere, ad esempio, che esista una collezione infinita di terne nel mondo, perché se così non fosse il numero totale di cose nel mondo sarebbe finito, il che, sebbene possibile, sembra improbabile. In terzo luogo, desideriamo definire "numero" in modo tale che siano possibili numeri infiniti; quindi dobbiamo essere in grado di parlare del numero di elementi in una collezione infinita, e tale collezione deve essere definita per intensione, *ovvero* da una proprietà comune a tutti i suoi elementi e a essi peculiare.

Per molti scopi, una classe e una sua caratteristica distintiva sono praticamente intercambiabili. La differenza vitale tra le due consiste nel fatto che esiste una sola classe avente un dato insieme di membri, mentre ci sono sempre molte caratteristiche diverse con cui una data classe può essere definita. Gli uomini possono essere definiti come bipedi senza piume, 14 o come animali razionali, o (più correttamente) dai tratti con cui Swift delinea gli Yahoo. È questo fatto che una caratteristica distintiva non è mai unica che rende utili le classi; altrimenti potremmo accontentarci delle proprietà comuni e peculiari ai loro membri. [4] Ognuna di queste proprietà può

può essere utilizzato al posto della classe ogniqualvolta l'unicità non è importante.

Tornando ora alla definizione di numero, è chiaro che il numero è un modo per raggruppare determinate collezioni, ovvero quelle che hanno un dato numero di elementi. Possiamo supporre che

tutte le coppie appartengano a un unico insieme, tutti i trii a un altro, e così via. In questo modo otteniamo diversi insiemi di collezioni, ciascuno dei quali è costituito da tutte le collezioni che hanno un certo numero di elementi. Ogni insieme è una classe i cui membri sono collezioni, *cioè* classi; quindi ciascuno è una classe di classi. L'insieme costituito da tutte le coppie, ad esempio, è una classe di classi: ogni coppia è una classe con due membri, e l'intero insieme di coppie è una classe con un numero infinito di membri, ognuno dei quali è una classe di due membri.

Come possiamo decidere se due collezioni appartengono allo stesso fascio? La risposta che viene spontanea è: "Scopri quanti membri ha ciascuna e mettile nello stesso fascio se hanno lo stesso numero di membri". Ma questo presuppone che abbiamo definito i numeri e che sappiamo come scoprire quanti termini ha una collezione.

Per semplificare la nostra esposizione, tratteremo le classi come se fossero reali.

ha. Siamo così abituati all'operazione di contare che un tale presupposto potrebbe facilmente passare inosservato. In realtà, tuttavia, il conteggio, sebbene familiare, è logicamente un'operazione molto complessa; inoltre è disponibile, come mezzo per scoprire quanti termini ha una collezione, solo quando la collezione è finita. La nostra definizione di numero non deve presupporre a priori che tutti i numeri siano finiti; e non possiamo

in ogni caso, senza un circolo vizioso, usare il conteggio per definire i numeri, perché i numeri sono usati nel conteggio. Abbiamo bisogno, quindi, di un altro metodo per decidere quando due collezioni hanno lo stesso numero di termini.

In realtà, logicamente è più semplice scoprire se due insiemi hanno lo stesso numero di elementi piuttosto che definire quale sia tale numero. Un esempio chiarirà questo concetto. Se non esistessero né la poligamia né la poliandria in nessuna parte del mondo, è evidente che il numero di mariti viventi in un dato momento sarebbe esattamente uguale al numero di mogli. Non abbiamo bisogno di un censimento per averne la certezza, né dobbiamo conoscere il numero effettivo di mariti e mogli. Sappiamo che il numero deve essere lo stesso in entrambi gli insiemi, perché ogni marito ha una moglie e ogni moglie ha un marito. La relazione tra marito e moglie è quella che viene definita "uno a uno".

Una relazione si dice "uno a uno" quando, se *x* ha la relazione in questione con *y* , nessun altro termine *x* ' ha la stessa relazione con *y* , e *x* non ha la stessa relazione con nessun termine *y* ' diverso da *y* . Quando è soddisfatta solo la prima di queste due condizioni, la relazione è detta "uno a molti"; quando è soddisfatta solo la seconda, è detta "molti a uno". Si noti che il numero 1 non viene utilizzato in queste definizioni.

Nei paesi cristiani, la relazione tra marito e moglie è uno a uno; nei paesi musulmani è uno a molti; in Tibet è molti a uno. La relazione tra padre e figlio è uno a molti; quella tra figlio e padre è

molti a uno, ma quella tra figlio maggiore e padre è uno a uno. Se *n* è un numero qualsiasi, la relazione tra *n* e *n* + 1 è uno a uno; così come la relazione tra n e 2n o a 3n. Quando consideriamo solo numeri positivi, la relazione tra n e n^2 è uno a uno *; ma* quando *ammettiamo* numeri *negativi* , diventa due a uno, poiché *n* e -n hanno lo stesso quadrato. Questi esempi dovrebbero bastare a chiarire le nozioni di relazioni uno a uno, uno a molti e molti a uno, che giocano *un* ruolo importante nei principi della matematica, non solo in relazione alla definizione dei numeri, ma in molte altre connessioni.

Si dice che due classi siano “simili” quando esiste una relazione biunivoca che correla i termini 16 di una classe con un termine dell’altra classe, nello stesso modo in cui la relazione di matrimonio correla mariti e mogli. Alcune definizioni preliminari ci aiuteranno a formulare questa definizione in modo più preciso. La classe di quei termini che hanno una data relazione con qualcos’altro è chiamata *dominio* di quella relazione: così i padri sono il dominio della relazione padre-figlio, i mariti sono il dominio della relazione marito-moglie, le mogli sono il dominio della relazione moglie-marito, e mariti e mogli insieme sono il dominio della relazione di matrimonio. La relazione moglie-marito è chiamata inversa *della* relazione marito-moglie. Allo stesso modo, *minore* è l’inverso di *maggiore* , *successivo* è l’inverso di *precedente* , e così via. In generale, l’inverso di una data relazione è quella relazione che sussiste tra *y* e *x* ogniqualvolta la data relazione sussiste tra *x* e *y* . Il *dominio inverso* di una relazione è il dominio della sua inversa: quindi la classe delle mogli è il dominio

inverso della relazione da marito a moglie. Possiamo ora enunciare la nostra definizione di similarità come segue:

Si dice che una classe è "simile" a un'altra quando esiste una relazione biunivoca in cui una classe costituisce il dominio, mentre l'altra ne costituisce il dominio inverso.

È facile dimostrare (1) che ogni classe è simile a se stessa, (2) che se una classe α è simile a una classe β , allora β è simile ad α , (3) che se α è simile a β e β a γ , allora α è simile a γ . Una relazione si dice *riflessiva* quando possiede la prima di queste proprietà, *simmetrica* quando possiede la seconda e *transitiva* quando possiede la terza. È ovvio che una relazione simmetrica e transitiva deve essere riflessiva in tutto il suo dominio. Le relazioni che possiedono queste proprietà sono un tipo importante, ed è opportuno notare che la similarità è una di queste.

È ovvio per il buon senso che due classi finite hanno lo stesso numero di termini se sono simili, ma non altrimenti. L'atto di contare consiste nello stabilire una correlazione uno a uno tra l' insieme degli oggetti contati e i numeri naturali (escluso 0) che vengono utilizzati nel processo. Di conseguenza, il buon senso conclude che ci sono tanti oggetti nell'insieme da contare quanti sono i numeri fino all'ultimo numero utilizzato nel conteggio. E sappiamo anche che, finché ci limitiamo ai numeri finiti, ci sono solo n numeri da 1 a n . Quindi ne consegue che l'ultimo numero utilizzato nel contare una collezione è il numero

di termini nella collezione, a condizione che la collezione sia finita. Ma questo risultato, oltre ad essere applicabile solo a collezioni finite, dipende dal fatto che due classi simili abbiano lo stesso numero di termini; infatti, quando contiamo (ad esempio) 10 oggetti, dimostriamo che l'insieme di questi oggetti è simile all'insieme dei numeri da 1 a 10. La nozione di somiglianza è logicamente presupposta nell'operazione di conteggio ed è logicamente più semplice, sebbene meno familiare. Nel conteggio, è necessario prendere gli oggetti contati in un certo ordine, come primo, secondo, terzo, ecc., ma l'ordine non è l'essenza del numero: è un'aggiunta irrilevante, una complicazione inutile dal punto di vista logico. La nozione di somiglianza non richiede un ordine: ad esempio, abbiamo visto che il numero di mariti è lo stesso del numero di mogli, senza dover stabilire un ordine di precedenza tra di loro. Il concetto di similarità non richiede necessariamente che le classi simili siano finite. Prendiamo, ad esempio, i numeri naturali (escluso *0*) da una parte, e le frazioni che hanno *1* come numeratore dall'altra: è ovvio che possiamo correlare 2 con 1/2 , 3 con 1/3 e così via, dimostrando in tal modo che le due classi sono simili .

Possiamo quindi usare la nozione di "somiglianza" per decidere quando due collezioni appartengono allo stesso bundle, nel senso in cui ci siamo posti questa domanda in precedenza in questo capitolo. Vogliamo creare un bundle contenente la classe che non ha membri: questo sarà per il numero 0. Poi vogliamo un bundle di tutte le classi che hanno un membro: questo sarà per il numero 1. Quindi, per il numero 2 , vogliamo un bundle costituito

da tutte le coppie; poi 18 da tutti i trii; e così via. Data una qualsiasi collezione, possiamo definire il bundle a cui appartiene come la classe di tutte quelle collezioni che sono "simili" ad essa. È molto facile vedere che se (per esempio) una collezione ha tre membri, la classe di tutte quelle collezioni che sono simili ad essa sarà la classe dei trii. E qualunque sia il numero di termini che una collezione può avere, le collezioni che sono "simili" ad essa avranno lo stesso numero di termini. Possiamo interpretare questa come una *definizione* di "avere lo stesso numero di termini". È ovvio che fornisce risultati conformi all'uso comune, a patto di limitarci a insiemi finiti.

Finora non abbiamo suggerito nulla di minimamente paradossale. Ma quando arriviamo alla definizione vera e propria di numeri, non possiamo evitare quello che a prima vista può sembrare un paradosso, anche se questa impressione svanirà presto . Pensiamo naturalmente che la classe delle coppie (per esempio) sia qualcosa di diverso dal numero 2. Ma non c'è dubbio sulla classe delle coppie: è indubitabile e non difficile da definire, mentre il numero 2 , in qualsiasi altro senso, è un'entità metafisica di cui non possiamo mai essere certi della sua esistenza o di averla individuata. È quindi più prudente accontentarsi della classe delle coppie, di cui siamo certi, piuttosto che andare a caccia di un problematico numero 2 che deve rimanere sempre sfuggente. Di conseguenza, proponiamo la seguente definizione:

Il numero di una classe è la classe di tutte quelle classi che sono simili ad essa.

Pertanto, il numero di una coppia sarà la classe di tutte le coppie. In effetti, la classe di tutte le coppie sarà *il* numero 2 , secondo la nostra definizione. A costo di una piccola stranezza, questa definizione garantisce determinatezza e indubitabilità; e non è difficile dimostrare che i numeri così definiti hanno tutte le proprietà che ci aspettiamo dai numeri.

Possiamo ora procedere a definire i numeri in generale come uno qualsiasi dei gruppi in cui la similarità raggruppa le classi. Un numero sarà un insieme di classi tali che due classi qualsiasi sono simili tra loro e nessuna classe esterna all'insieme è simile a nessuna classe interna all'insieme. In altre parole, un numero (in generale) è qualsiasi collezione che è il numero di uno dei suoi membri; o, più semplicemente:

Un numero è qualsiasi cosa che rappresenti il numero di una determinata classe.

Una simile definizione può apparire verbalmente circolare, ma in realtà non lo è. Definiamo "il numero di una data classe" senza utilizzare la nozione di numero in generale; pertanto, possiamo definire il numero in generale in termini di "il numero di una data classe" senza commettere alcun errore logico.

Definizioni di questo tipo sono in realtà molto comuni. La categoria dei padri, ad esempio, dovrebbe essere definita prima definendo cosa significa essere padre di qualcuno; quindi la

categoria dei padri comprenderà tutti coloro che sono padri di qualcuno. Allo stesso modo, se vogliamo definire i numeri quadrati (per esempio), dobbiamo prima definire cosa intendiamo quando diciamo che un numero è il quadrato di un altro, e poi definire i numeri quadrati come quelli che sono i quadrati di altri numeri. Questo tipo di procedura è molto comune, ed è importante rendersi conto che è legittima e spesso persino necessaria.

Abbiamo ora fornito una definizione di numeri che sarà utile per collezioni finite. Resta da vedere come sarà utile per collezioni infinite. Ma prima dobbiamo decidere cosa intendiamo per "finito" e "infinito", cosa che non può essere fatta entro i limiti del presente capitolo.

Capitolo III Finitezza e induzione matematica

Come abbiamo visto nel Capitolo 20 I, la serie dei numeri naturali può essere definita interamente se conosciamo il significato dei tre termini " 0 ", "numero" e "successore". Ma possiamo spingerci oltre: possiamo definire tutti i numeri naturali se conosciamo il significato di " 0 " e "successore". Comprendere come ciò sia possibile e perché il metodo utilizzato non possa essere esteso oltre il finito ci aiuterà a capire la differenza tra finito e infinito. Non prenderemo ancora in considerazione la definizione di " 0 " e "successore": per il momento daremo per scontato di conoscere il significato di questi termini e mostreremo come da essi si possano ricavare tutti gli altri numeri naturali.

È facile vedere che possiamo raggiungere qualsiasi numero assegnato, diciamo 30 , 0000. Definiamo prima " 1 " come "il successore di 0 ", poi definiamo " 2 " come "il successore di 1 ", e così via. Nel caso di un numero assegnato, come 30 , 00000 , la dimostrazione che possiamo raggiungerlo procedendo passo dopo passo in questo modo può essere fatta, se abbiamo la pazienza, tramite un esperimento: possiamo continuare finché non arriviamo effettivamente a 30 , 00000. Ma sebbene il metodo sperimentale sia disponibile per ogni singolo numero naturale, non è disponibile per dimostrare la proposizione generale che *tutti* questi numeri possono essere raggiunti in questo modo, *cioè* procedendo da 0 passo dopo passo da ciascun numero al suo successore. Esiste un altro modo per dimostrarlo?

Consideriamo la questione da un'altra prospettiva. Quali sono i numeri raggiungibili, dati i termini “ 0 ” e “ successore”? Esiste un modo, tramite 21, per definire l’intera classe di tali numeri? Raggiungiamo 1 come successore di 0 ; 2 come successore di 1 ; 3 come successore di 2 ; e così via. È questo “e così via” che desideriamo sostituire con qualcosa di meno vago e indefinito. Potremmo essere tentati di dire che “e così via” significa che il processo di passaggio al successore può essere ripetuto *un numero finito* di volte; ma il problema che stiamo affrontando è quello di definire “numero finito”, e quindi non dobbiamo usare questa nozione nella nostra definizione. La nostra definizione non deve presupporre che sappiamo cosa sia un numero finito.

La chiave del nostro problema risiede *nell'induzione matematica* . Si ricorderà che, nel Capitolo I, questa era la quinta delle cinque proposizioni primitive che abbiamo enunciato sui numeri naturali. Essa affermava che qualsiasi proprietà che appartiene a 0 , e al successore di qualsiasi numero che possiede tale proprietà, appartiene a tutti i numeri naturali. Questa fu presentata allora come un principio, ma ora la adotteremo come una definizione. Non è difficile vedere che i termini che obbediscono a questa proposizione sono gli stessi numeri che si possono raggiungere da 0 mediante passaggi successivi dal numero successivo, ma poiché il punto è importante, lo esporremo in dettaglio.

È opportuno cominciare con alcune definizioni, che risulteranno utili anche in altri contesti.

Una proprietà si dice "ereditaria" nella serie dei numeri naturali se, ogni volta che appartiene a un numero *n* , appartiene anche a *n* + 1 , il successore di *n* . Analogamente, una classe si dice "ereditaria" se, ogni volta che *n* è un membro della classe, lo è anche *n* + 1. È facile *vedere* , anche se non dovremmo ancora saperlo, che dire che una proprietà è ereditaria equivale a dire che appartiene a tutti i numeri naturali non inferiori ad almeno uno di essi, *ad esempio* deve appartenere a tutti quelli non inferiori a 1000 , o a tutti quelli non inferiori a 10000 , oppure può essere che appartenga a tutti quelli non inferiori a 0 , *cioè* a tutti senza eccezione.

Si dice che una proprietà è "induttiva" quando è una proprietà ereditaria che appartiene a 0. Allo stesso modo, 22 una classe è "induttiva" quando è una classe ereditaria di cui 0 è membro.

Data una classe ereditaria di cui 0 è membro, ne consegue che 1 ne è membro, poiché una classe ereditaria contiene i successori dei suoi membri, e 1 è il successore di 0. Analogamente, data una classe ereditaria di cui 1 è membro, ne consegue che 2 ne è membro; e così via. Possiamo quindi dimostrare, passo dopo passo, che qualsiasi numero naturale assegnato, diciamo 30 , 0000 , è membro di ogni classe induttiva.

Definiremo la “posteriorità” di un dato numero naturale rispetto alla relazione “predecessore immediato” (che è l’inverso di “successore”) come l’insieme di tutti quei termini che appartengono a ogni classe ereditaria a cui appartiene il numero dato. È facile constatare *che* la posterità di un numero naturale è

costituita da esso stesso e da tutti i numeri naturali maggiori; ma anche questo non lo sappiamo ancora ufficialmente .

In base alle definizioni di cui sopra, la posterità di θ sarà costituita da quei termini che appartengono a ogni classe induttiva.

Ora non è difficile rendere ovvio che la posterità di θ è lo stesso insieme dei termini che si possono raggiungere da θ mediante passaggi successivi dal successivo al successivo. Infatti, in primo luogo, θ appartiene a entrambi questi insiemi (nel senso in cui abbiamo definito i nostri termini); in secondo luogo, se *n* appartiene a entrambi gli insiemi, lo stesso vale per *n* + θ . Va osservato che qui abbiamo a che fare con un tipo di materia che non ammette una dimostrazione precisa, vale a dire il confronto tra un'idea relativamente vaga e una relativamente precisa. La nozione di "quei termini che si possono raggiungere da θ mediante passaggi successivi dal successivo al successivo" è vaga, sebbene *sembri* veicolare un significato definito; d'altra parte, "la posterità di θ " è precisa ed esplicita proprio laddove l'altra idea è nebulosa. Può essere considerata come ciò che intendevamo *dire* quando abbiamo parlato dei termini che si possono raggiungere da θ mediante passaggi successivi.

Diamo ora la seguente definizione:

I "numeri naturali" sono la posterità di 0 *rispetto alla relazione " predecessore immediato"* (che 23 è l'inverso di "successore").

Siamo dunque giunti a una definizione di una delle tre idee primitive di Peano in termini delle altre due. Come risultato di

questa definizione, due delle sue proposizioni primitive – vale a dire quella che afferma che 0 è un numero e quella che afferma l'induzione matematica – diventano superflue, poiché derivano dalla definizione stessa. Quella che afferma che il successore di un numero naturale è un numero naturale è necessaria solo nella forma indebolita "ogni numero naturale ha un successore".

Possiamo, naturalmente, definire facilmente " ∞ " e "successore" per mezzo della definizione di numero in generale a cui siamo giunti nel Capitolo II. Il numero ∞ è il numero di termini in una classe che non ha membri, *cioè* nella classe che viene chiamata "classe nulla". Per definizione generale di numero, il numero di termini nella classe nulla è l'insieme di tutte le classi simili alla classe nulla, *cioè* (come si può facilmente dimostrare) l'insieme costituito dalla sola classe nulla, *ovvero* la classe il cui unico membro è la classe nulla. (Questa non è identica alla classe nulla: ha un membro, vale a dire la classe nulla, mentre la classe nulla stessa non ha membri. Una classe che ha un membro non è mai identica a quel singolo membro, come spiegheremo quando arriveremo alla teoria delle classi.) Abbiamo quindi la seguente definizione puramente logica: ∞ è *la classe il cui unico membro è la classe nulla*.

Resta da definire "successore". Dato un numero qualsiasi n , sia α una classe che ha n membri, e sia x un termine che non è membro di α . Allora la classe costituita da α con l'aggiunta di x avrà $n + 1$ membri. Pertanto abbiamo la seguente definizione:

Il successore del numero di termini nella classe α è il numero di termini nella classe costituita da α insieme a x, *dove* x *è un qualsiasi termine non appartenente alla classe.*

Sono necessarie alcune sottigliezze per rendere perfetta questa definizione, ma non devono interessarci. [5] Si ricorderà che abbiamo già dato (nel Capitolo II del paragrafo 2) una definizione logica del numero di termini in una classe, vale a dire, l'abbiamo definita come l'insieme di tutte le classi che sono simili alla classe data.

Abbiamo così ridotto le tre idee primitive di Peano a idee logiche: ne abbiamo dato definizioni che le rendono precise, non più capaci di un'infinità di significati diversi , come lo erano quando erano determinate solo nella misura in cui obbedivano ai cinque assiomi di Peano. Le abbiamo rimosse dall'apparato fondamentale di termini che devono essere semplicemente appresi, e abbiamo così ampliato l'articolazione deduttiva della matematica.

Per quanto riguarda le cinque proposizioni primitive, siamo già riusciti a dimostrarne due tramite la nostra definizione di "numero naturale". Come stiamo con le restanti tre? È molto facile dimostrare che 0 non è il successore di alcun numero e che il successore di qualsiasi numero è un numero. Ma c'è una difficoltà riguardo alla proposizione primitiva rimanente, ovvero "nessun numero ha lo stesso successore di un altro". La difficoltà non si presenta a meno che il numero totale di individui nell'universo non sia finito; dati due numeri *m* e *n* , nessuno dei quali è il

numero totale di individui nell'universo, è facile dimostrare che non possiamo avere $m + 1 = n + 1$ a meno che non si abbia $m = n$. Ma supponiamo che il numero totale di individui nell'universo fosse (diciamo) 10 ; allora non ci sarebbe alcuna classe di 11 individui e il numero 11 sarebbe la classe nulla. Lo stesso varrebbe per il numero 12 . Pertanto dovremmo avere 11 = 12 ; quindi il successore di 10 sarebbe lo stesso del successore di 11 , sebbene 10 non sarebbe lo stesso di 11. Quindi dovremmo avere due numeri diversi con lo stesso successore. Questa violazione del terzo assioma non può tuttavia verificarsi se il numero di individui nel mondo non è finito. Torneremo su questo argomento in seguito. [6]

Supponendo che il numero di individui nell'universo non sia finito, siamo ora riusciti non solo a definire le tre idee primitive di Peano, ma anche a vedere come dimostrare le sue cinque proposizioni primitive, per mezzo di idee primitive e proposizioni appartenenti alla logica. Ne consegue che tutta la matematica pura, nella misura in cui è deducibile dalla teoria dei numeri naturali, non è altro che un prolungamento della logica. L'estensione di questo risultato a quei rami moderni della matematica che non sono deducibili dalla teoria dei numeri naturali non offre alcuna difficoltà di principio, come abbiamo dimostrato altrove. [7]

Il processo di induzione matematica, mediante il quale abbiamo definito i numeri naturali, è suscettibile di generalizzazione. Abbiamo definito i numeri naturali come la “posteriorità” di 0 rispetto alla relazione di un numero con il suo successore

immediato. Se chiamiamo questa relazione N, ogni numero *m* avrà questa relazione con *m* + 1. Una proprietà è “ereditaria rispetto a N”, o semplicemente “N-ereditaria”, se, ogniqualvolta la proprietà appartiene a un numero *m* , appartiene anche a *m* + 1 , *cioè* al numero con cui *m* ha la relazione N. E si dirà che un numero *n appartiene alla “posteriorità” di m* rispetto alla relazione N se *n* ha ogni proprietà N-ereditaria appartenente a *m* . Queste definizioni possono essere applicate a qualsiasi altra relazione così come a N. Quindi, se R è una qualsiasi relazione, possiamo stabilire le seguenti definizioni: [8] —

Una proprietà si dice “R-ereditaria” quando, se appartiene a un termine *x* e *x* ha la relazione R con *y* , allora appartiene anche a *y* .

Una classe è R-ereditaria quando la sua proprietà di definizione è R-ereditaria.

Si dice che un termine *x* sia un “antenato R” del termine *y* se *y* ha ogni proprietà ereditaria R che ha *x* , a condizione che *x* sia un termine che ha la relazione R con qualcosa o con cui qualcosa ha la relazione

R. (Questo serve solo ad escludere i casi banali.) |

La “R-possidenza” di *x* è costituita da tutti i termini di cui *x* 26 è un antenato R.

Abbiamo formulato le definizioni di cui sopra in modo tale che se un termine è l'antenato di qualcosa, è l'antenato di se stesso e appartiene alla propria discendenza. Questo è solo per comodità.

Si osserverà che se assumiamo per R la relazione “genitore”, “antenato” e “posterità” avranno i significati usuali, tranne per il fatto che una persona sarà inclusa tra i propri antenati e la propria posterità. È ovviamente subito evidente che “antenato” deve essere definibile in termini di “genitore”, ma fino a quando Frege non sviluppò la sua teoria generalizzata dell’induzione, nessuno avrebbe potuto definire “antenato” precisamente in termini di “genitore”. Una breve considerazione di questo punto servirà a mostrare l’importanza della teoria. Una persona che si trovasse per la prima volta di fronte al problema di definire “antenato” in termini di “genitore” direbbe naturalmente che A è un antenato di Z se, tra A e Z, c’è un certo numero di persone, B, C, ..., di cui B è figlio di A, ciascuna è genitore della successiva, fino all’ultima, che è genitore di Z. Ma questa definizione non è adeguata a meno che non si aggiunga che il numero di termini intermedi deve essere finito.

Prendiamo, ad esempio, una serie come la seguente:

$-1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ -4\,\frac{1}{}\,,\ -8\,\frac{1}{}\,,\ \ldots\ 8\,\frac{1}{}\,,\ \frac{1}{}\,4\,,\ \frac{1}{}\,2\,,\ 1\,.$

Qui abbiamo prima una serie di frazioni negative senza fine, e poi una serie di frazioni positive senza inizio. Dobbiamo dire che, in questa serie, −1/8 è un antenato di 1/8 ? Lo sarà secondo la definizione per principianti suggerita sopra, ma non lo sarà secondo nessuna definizione che dia *il* tipo di idea che vogliamo definire. A questo scopo, è essenziale che il numero di intermediari sia finito. Ma, come abbiamo visto, "finito" va definito per induzione matematica, ed è più semplice definire la relazione

ancestrale in generale fin da subito piuttosto che definirla prima solo per il caso della relazione da *n* a *n* + 1 , e poi estenderla ad altri casi. Qui, come costantemente altrove, la generalità fin dall'inizio, sebbene possa richiedere più riflessione iniziale, si rivelerà alla lunga un modo per risparmiare tempo e aumentare la potenza logica.

L'uso dell'induzione matematica nelle dimostrazioni era, in passato, un po' un mistero. Non sembrava esserci alcun dubbio ragionevole che fosse un metodo di dimostrazione valido, ma nessuno sapeva esattamente perché lo fosse. Alcuni credevano che fosse davvero un caso di induzione, nel senso in cui tale termine è usato in logica. Poincaré [9] lo considerava un principio di estrema importanza, mediante il quale un numero infinito di sillogismi poteva essere condensato in un unico argomento. Ora sappiamo che tutte queste opinioni sono errate e che l'induzione matematica è una definizione, non un principio. Ci sono alcuni numeri ai quali può essere applicata e altri (come vedremo nel Capitolo VIII) ai quali non può essere applicata. Definiamo *i* "numeri naturali" come quelli ai quali possono essere applicate le dimostrazioni per induzione matematica, *cioè* come quelli che possiedono tutte le proprietà induttive. Ne consegue che tali dimostrazioni possono essere applicate ai numeri naturali, non in virtù di qualche misteriosa intuizione, assioma o principio, ma come una proposizione puramente verbale. Se per "quadrupedi" si intendono gli animali che hanno quattro zampe, ne consegue che gli animali che hanno quattro zampe sono quadrupedi; e il

caso dei numeri che obbediscono all'induzione matematica è esattamente analogo.

Useremo l'espressione "numeri induttivi" per indicare lo stesso insieme di numeri di cui abbiamo parlato finora come "numeri naturali". L'espressione "numeri induttivi" è preferibile in quanto ricorda che la definizione di questo insieme di numeri si ottiene per induzione matematica.

L'induzione matematica fornisce , più di ogni altra cosa, la caratteristica essenziale che distingue il finito dall'infinito. Il principio di induzione matematica potrebbe essere formulato in modo divulgativo come "ciò che si può dedurre dal successivo al successivo si può dedurre dal primo all'ultimo". Questo è vero quando il numero di passaggi intermedi tra il primo e l'ultimo è finito, altrimenti no.

Chiunque abbia mai visto un treno merci iniziare a muoversi avrà notato come l'impulso venga comunicato con uno scossone da ogni vagone al successivo, finché alla fine anche il vagone più arretrato non si mette in movimento. Quando il treno è molto lungo, passa molto tempo prima che l'ultimo vagone si muova. Se il treno fosse infinitamente lungo, ci sarebbe una successione infinita di scossoni e non arriverebbe mai il momento in cui l'intero treno fosse in movimento. Tuttavia, se ci fosse una serie di vagoni non più lunga della serie dei numeri induttivi (che, come vedremo, è un esempio del più piccolo degli infiniti), ogni vagone inizierebbe a muoversi prima o poi se la locomotiva perseverasse, anche se ci sarebbero sempre altri vagoni più indietro che non si fossero

ancora messi in movimento. Questa immagine aiuterà a chiarire l'argomento dal prossimo al prossimo e la sua connessione con la finitezza. Quando si arriva ai numeri infiniti, dove gli argomenti basati sull'induzione matematica non sono più validi, le proprietà di tali numeri aiuteranno a chiarire, al contrario, l'uso quasi inconscio che viene fatto dell'induzione matematica quando si tratta di numeri finiti.

Capitolo IV La definizione di ordine

Abbiamo ormai condotto la nostra analisi della serie dei 29 numeri naturali fino al punto in cui abbiamo ottenuto definizioni logiche degli elementi di questa serie, dell'intera classe dei suoi elementi e della relazione di un numero con il suo successore immediato. Dobbiamo ora considerare il carattere *seriale* dei numeri naturali nell'ordine 0 , 1 , 2 , 3 , ... Di solito pensiamo ai numeri in quest'ordine , ed è parte essenziale del lavoro di analisi dei nostri dati cercare una definizione di "ordine" o "serie" in termini logici.

Il concetto di ordine riveste un'enorme importanza in matematica. Non solo i numeri interi, ma anche le frazioni razionali e tutti i numeri reali possiedono un ordine di grandezza, essenziale per la maggior parte delle loro proprietà matematiche. L'ordine dei punti su una retta è fondamentale per la geometria; così come l'ordine, leggermente più complesso, delle rette passanti per un punto in un piano, o dei piani passanti per una retta. Le dimensioni, in geometria, sono un'evoluzione del concetto di ordine. La concezione di *limite* , che è alla base di tutta la matematica superiore, è una concezione seriale. Esistono branche della matematica che non dipendono dal concetto di ordine, ma sono molto poche rispetto a quelle in cui tale concetto è coinvolto.

Nel cercare una definizione di ordine, la prima cosa da realizzare è che nessun insieme di termini ha *un* solo ordine che esclude gli altri. Un insieme di termini ha tutti gli ordini di cui è capace. A volte un ordine è così familiare e naturale ai nostri pensieri che

siamo inclini a considerarlo come *l' ordine* 30 di quell'insieme di termini; ma questo è un errore. I numeri naturali, o numeri "induttivi", come li chiameremo anche, ci si presentano più facilmente in ordine di grandezza; ma sono capaci di un numero infinito di altre disposizioni. Potremmo, ad esempio, considerare prima tutti i numeri dispari e poi tutti i numeri pari; oppure prima 1 , poi tutti i numeri pari, poi tutti i multipli dispari di 3 , poi tutti i multipli di 4 ma non di 2 o 3 , poi tutti i multipli di 4 ma non di 2 o 3 o 4 , e così via attraverso l'intera serie dei numeri primi. Quando noi

Affermare che "organizziamo" i numeri in questi vari ordini è un'espressione imprecisa: ciò che facciamo realmente è rivolgere la nostra attenzione a determinate relazioni tra i numeri naturali, che a loro volta generano un tale ordinamento. Non possiamo "organizzare" i numeri naturali più di quanto possiamo organizzare il cielo stellato; ma così come possiamo notare tra le stelle fisse il loro ordine di luminosità o la loro distribuzione nel cielo, allo stesso modo esistono diverse relazioni tra i numeri che possono essere osservate e che danno origine a diversi ordinamenti tra i numeri, tutti ugualmente legittimi. E ciò che è vero per i numeri è altrettanto vero per i punti su una retta o per gli istanti di tempo: un ordine è più familiare, ma altri sono ugualmente validi. Potremmo, ad esempio, prendere prima, su una retta, tutti i punti che hanno coordinate intere, poi tutti quelli che hanno coordinate razionali non intere, poi tutti quelli che hanno coordinate algebriche non razionali, e così via, attraverso qualsiasi insieme di complicazioni desideriamo. L'ordine risultante sarà quello che i

punti della linea hanno certamente, che scegliamo di notarlo o no; l'unica cosa arbitraria riguardo ai vari ordini di un insieme di termini è la nostra attenzione, poiché i termini stessi hanno sempre tutti gli ordini di cui sono capaci. Un risultato importante di questa considerazione è che

Non dobbiamo cercare la definizione di ordine nella natura dell'insieme dei termini da ordinare, poiché un insieme di termini ha molti ordini. L'ordine non risiede nella *classe* dei termini, ma in una relazione tra i membri della classe , rispetto alla quale alcuni appaiono come precedenti e altri come successivi. Il fatto che una classe possa avere molti ordini è dovuto al fatto che possono sussistere molte relazioni tra i membri di una singola classe. Quali proprietà deve avere una relazione per dare origine a un ordine?

Le caratteristiche essenziali di una relazione che deve dare origine a un ordine possono essere scoperte considerando che, rispetto a tale relazione, dobbiamo essere in grado di dire, di due qualsiasi termini della classe che deve essere ordinata, che uno “precede” e l’altro “segue”. Ora, affinché possiamo usare queste parole nel modo in cui dovremmo naturalmente intenderle, richiediamo che la relazione d’ordine abbia tre proprietà:

(1) Se *x* precede *y* , *y* non deve precedere anche *x* . Questa è una caratteristica ovvia del tipo di relazioni che portano a serie. Se *x* è minore di *y* , *y* non è anche minore di *x* . Se *x* è precedente nel tempo rispetto a *y* , *y* non è anche precedente di *x* . Se *x* è a sinistra di *y* , *y* non è a sinistra di *x* . D'altra parte, le relazioni che non danno origine a serie spesso non hanno questa proprietà. Se

x è fratello o sorella di *y* , *y* è fratello o sorella di *x* . Se *x* ha la stessa altezza di *y* , *y* ha la stessa altezza di *x* . Se *x* ha un'altezza diversa da *y* , *y* ha un'altezza diversa da *x* . In tutti questi casi, quando la relazione sussiste tra *x* e *y* , sussiste anche tra *y* e *x* . Ma con le relazioni seriali una cosa del genere non può accadere. Una relazione che possiede questa prima proprietà è detta *asimmetrica* .

(2) Se *x* precede *y* e *y* precede *z* , *x* deve precedere *z* . Questo può essere illustrato dagli stessi esempi di prima: *meno* , *prima* , *a sinistra di* . Ma come esempi di relazioni che *non* hanno questa proprietà, solo due dei nostri tre esempi precedenti saranno utili. Se *x* è fratello o sorella di *y* e *y* di *z* , *x* potrebbe non essere fratello o sorella di *z* , poiché *x* e *z* potrebbero essere la stessa persona. Lo stesso vale per la differenza di altezza, ma non per la somiglianza di altezza, che ha la nostra seconda proprietà ma non la nostra prima. La relazione "padre", d'altra parte, ha la nostra prima proprietà ma non la nostra seconda . Una relazione che ha la nostra seconda proprietà è detta *transitiva* .

(3) Dati due termini qualsiasi della classe da ordinare, ce ne deve essere uno che precede e l'altro che segue. Ad esempio, di due numeri interi, frazioni o numeri reali qualsiasi, uno è minore e l'altro maggiore; ma di due numeri complessi qualsiasi questo non è vero. Di due momenti qualsiasi nel tempo, uno deve essere precedente all'altro; ma di eventi, che possono essere simultanei, questo non si può dire. Di due punti su una retta, uno deve essere

a sinistra dell'altro. Una relazione che possiede questa terza proprietà è detta *connessa* .

Quando una relazione possiede queste tre proprietà, è del tipo che dà origine a un ordine tra i termini tra cui intercorre; e ovunque esista un ordine, si può trovare una relazione che possiede queste tre proprietà e che lo genera.

Prima di illustrare questa tesi, introdurremo alcune definizioni.

(1) Una relazione si dice aliorelativa, [10] o *contenuta in* o *implicante diversità* , se nessun termine ha questa relazione con se stesso. Così, ad esempio, “maggiore”, “diverso per dimensioni”, “fratello”, “marito”, “padre” sono aliorelativi; ma “uguale”, “nato dagli stessi genitori”, “caro amico” non lo sono.

(2) Il *quadrato* di una relazione è quella relazione che sussiste tra due termini *x* e *z* quando esiste un termine intermedio *y* tale che la relazione data sussista tra *x* e *y* e tra *y* e *z* . Quindi "nonno paterno" è il quadrato di "padre", "maggiore di 2 " è il quadrato di "maggiore di 1 ", e così via.

(3) Il *dominio* di una relazione è costituito da tutti quei termini che hanno la relazione con qualcosa o qualcos'altro, e il *dominio inverso* è costituito da tutti quei termini con cui qualcosa o qualcos'altro ha la relazione. Queste parole sono già state definite, ma vengono richiamate qui per la seguente definizione:

( ) Il *campo* di una relazione è costituito dal suo dominio

e conversare il dominio insieme. |

( ) Si dice che una relazione *contiene* o è *implicata* *da* un'altra se vale ogniqualvolta vale l'altra.

Si vedrà che una relazione *asimmetrica* è la stessa cosa di una relazione il cui quadrato è un'aliorelativa. Accade spesso che una relazione sia un'aliorelativa senza essere asimmetrica, sebbene una relazione asimmetrica sia sempre un'aliorelativa. Ad esempio, "coniuge" è un'aliorelativa, ma è simmetrica, poiché se *x* è il coniuge di *y* , *y* è il coniuge di *x* . Ma tra le relazioni *transitive* , tutte le aliorelative sono asimmetriche, e *viceversa* .

Dalle definizioni si evince che una relazione *transitiva* è una relazione che è implicata dal suo quadrato, o, come diciamo anche, "contiene" il suo quadrato. Quindi "antenato" è transitivo, perché l'antenato di un antenato è un antenato; ma "padre" non è transitivo, perché il padre di un padre non è un padre. Una relazione aliorelativa transitiva è una relazione che contiene il suo quadrato ed è contenuta nella diversità; o, il che equivale alla stessa cosa, una relazione il cui quadrato implica sia essa che la diversità, perché, quando una relazione è transitiva, l'asimmetria equivale ad essere una relazione aliorelativa.

Una relazione è *connessa* quando, dati due termini diversi qualsiasi del suo campo, la relazione sussiste tra il primo e il secondo oppure tra il secondo e il primo (senza escludere la possibilità che entrambe le cose accadano, sebbene entrambe siano impossibili se la relazione è asimmetrica).

Si noterà che la relazione “antenato”, ad esempio, è aliorelativa e transitiva, ma non connessa; è proprio perché non connessa che non è sufficiente a disporre il genere umano in una serie.

La relazione “minore o uguale a”, tra i numeri, è transitiva e connessa, ma non asimmetrica né aliorelativa.

La relazione “maggiore o minore” tra i numeri è aliorelativa ed è connessa, ma non transitiva, perché se *x* è maggiore o minore di *y* e *y* è maggiore o minore di *z* , può accadere che *x* e *z* siano lo stesso numero.

Pertanto le tre proprietà di essere (1) aliorelativo, (2) transitivo e (3) connesso sono reciprocamente indipendenti , poiché una relazione può averne due senza avere la terza.

Diamo ora la seguente definizione:

Una relazione è *seriale* quando è aliorelativa, transitiva e connessa; o, il che è equivalente, quando è asimmetrica, transitiva e connessa.

Una *serie* è sinonimo di relazione seriale.

Si potrebbe pensare che una serie debba essere il *campo* di una relazione seriale, non la relazione seriale stessa. Ma questo sarebbe un errore. Ad esempio,

1 , 2 , 3 ; 1 , 3 , 2 ; 2 , 3 , 3 ; 2 , 3 , 3 ; 3 , 3 , 3 ; 3 , 3 , 3

Esistono sei serie diverse che hanno tutte lo stesso campo. Se il campo *fosse* la serie, potrebbe esistere una sola serie con un dato

campo. Ciò che distingue le sei serie sopra menzionate è semplicemente la diversa relazione d'ordine nei sei casi. Data la relazione d'ordine, sia il campo che l'ordine sono determinati. Pertanto, la relazione d'ordine può essere considerata come *la* serie, ma il campo non può esserlo.

Data una qualsiasi relazione seriale, diciamo P, diremo che, rispetto a questa relazione, *x* "precede" *y* se *x* ha la relazione P con *y* , che scriveremo brevemente " *x* P *y* ". Le tre caratteristiche che P deve avere per essere seriale sono:

(1) Non dobbiamo mai avere *x* P *x* , *cioè* nessun termine deve precedere se stesso.

(2) P^2 deve implicare P, *cioè* se *x* precede *y* e *y* precede *z* , *x* deve precedere *z* .

(3) Se *x* e *y* sono due termini diversi nel campo di P, avremo *x* P *y* o *y* P *x* , *cioè* uno dei due deve precedere l'altro.

Il lettore può facilmente convincersi che, laddove queste tre proprietà si riscontrano in una relazione d'ordine, si troveranno anche le caratteristiche che ci aspettiamo da una serie, e *viceversa* . Siamo quindi giustificati nel considerare quanto sopra come una definizione di ordine o serie . E si osserverà che la definizione è fatta in termini puramente logici .

Sebbene una relazione transitiva, asimmetrica e connessa esista sempre ovunque ci sia una serie, non è sempre la relazione che verrebbe più naturalmente considerata come generatrice della

serie. La serie dei numeri naturali può servire da esempio. La relazione che abbiamo assunto considerando i numeri naturali era la relazione di successione immediata, *ovvero* la relazione tra interi consecutivi. Questa relazione è asimmetrica, ma non transitiva né connessa. Possiamo tuttavia derivarne, mediante il metodo dell'induzione matematica, la relazione "ancestrale" che abbiamo considerato nel capitolo precedente. Questa relazione sarà la stessa di "minore o uguale a" tra interi induttivi. Ai fini della generazione della serie dei numeri naturali, ci serve la relazione "minore di", escludendo "uguale a". Questa è la relazione tra *m* e *n* quando *m* è un antenato di *n* ma non identico a *n* , o (il che equivale alla stessa cosa) quando il successore di *m* è un antenato di *n* nel senso in cui un numero è il proprio antenato. Vale a dire, stabiliremo la seguente definizione:

Si dice che un numero induttivo *m* è *minore di* un altro numero *n* quando *n* possiede ogni proprietà ereditaria posseduta dal successore di *m* .

È facile vedere, e non difficile dimostrare , che la relazione “minore di”, così definita, è asimmetrica, transitiva e connessa, e ha come campo i numeri induttivi. Pertanto, per mezzo di questa relazione, i numeri induttivi acquisiscono un ordine nel senso in cui abbiamo definito il termine “ordine”, e questo ordine è il cosiddetto ordine “naturale”, o ordine di grandezza.

La generazione di serie mediante relazioni più o meno simili a quella da *n* a *n* + 1 è molto comune. La serie dei re d'Inghilterra, ad esempio, è generata dalle relazioni di ciascun termine con il suo

successore. Questo è probabilmente il modo più semplice, laddove applicabile, di concepire la generazione di una serie. In questo metodo si passa da un termine all'altro, purché esista un termine successivo, oppure si torna al termine precedente , purché esista un termine precedente. Questo metodo richiede sempre la forma generalizzata dell'induzione matematica per poter definire "prima" e "dopo" in una serie così generata. Per analogia con le "frazioni proprie", chiamiamo "posteriorità propria di *x* rispetto a R" la classe di quei termini che appartengono alla R-posteriorità di un termine con cui *x* ha la relazione R, nel senso che abbiamo dato in precedenza a "posteriorità", che include un termine nella propria posterità. Tornando alle definizioni fondamentali, constatiamo che la “proprietà posterità” può essere definita come segue:

La “proprietà propria” di *x* rispetto a R è costituita da tutti i termini che possiedono ogni proprietà ereditaria R posseduta da ogni termine con cui *x* ha la relazione R.

Occorre osservare che questa definizione deve essere formulata in modo da essere applicabile non solo quando esiste un solo termine con cui *x* ha la relazione R, ma anche in casi (come *ad esempio* quello di padre e figlio) in cui possono esserci molti termini con cui *x* ha la relazione R. Definiamo inoltre:

Un termine *x* è un “antenato proprio” di *y* rispetto

a R se *y* appartiene alla posterità propria di *x* rispetto a R.

Useremo le espressioni "posterità R" e "antenati R" quando queste sembreranno più convenienti.

Tornando ora alla generazione di serie tramite la relazione R tra termini consecutivi, vediamo che, affinché questo metodo sia possibile, la relazione "antenato R proprio" deve essere aliorelativa, transitiva e connessa. In quali circostanze ciò si verifica? Sarà sempre transitiva: indipendentemente dal tipo di relazione R, "antenato R" e "antenato R proprio" sono sempre entrambi transitivi. Ma solo in determinate circostanze sarà aliorelativa o connessa. Consideriamo, ad esempio, la relazione con il vicino di sinistra a un tavolo rotondo a cui sono sedute dodici persone. Se chiamiamo questa relazione R, la posterità R propria di una persona è costituita da tutti coloro che possono essere raggiunti girando intorno al tavolo da destra a sinistra. Questo include tutti i presenti al tavolo, compresa la persona stessa, poiché dodici passi ci riportano al nostro punto di partenza. Pertanto, in un caso simile, sebbene la relazione “antenato proprio di R” sia connessa, e sebbene R stesso sia un aliorelativo, non otteniamo una serie perché “antenato proprio di R” non è un aliorelativo.

è per questo motivo che non possiamo dire che una persona venga prima di un'altra rispetto alla relazione “diritto di” o al suo derivato ancestrale.

Il caso sopra descritto illustra come la relazione ancestrale fosse connessa ma non contenuta nella diversità. Un esempio in cui è contenuta nella diversità ma non connessa deriva dal significato

ordinario del termine "antenato". Se *x* è un antenato proprio di *y* , *x* e *y* non possono essere la stessa persona; ma non è vero che di due persone qualsiasi una debba essere necessariamente antenata dell'altra.

Spesso è importante la questione delle circostanze in cui le serie possono essere generate da relazioni di discendenza derivate da relazioni di consecutività. Alcuni dei casi più importanti sono i seguenti: sia R una relazione molti-uno e limitiamo la nostra attenzione alla discendenza di un certo termine *x* . In tal caso, la relazione "antenato proprio di R" deve essere connessa; pertanto, tutto ciò che resta da fare per garantirne la serialità è che essa sia contenuta nella diversità. Questa è una generalizzazione dell'esempio della tavola imbandita. Un'altra generalizzazione consiste nel considerare R una relazione uno-uno e nell'includere sia l'ascendenza di *x* che la discendenza. Anche in questo caso, l'unica condizione necessaria per garantire la generazione di una serie è che la relazione "antenato proprio di R" sia contenuta nella diversità.

La generazione dell'ordine per mezzo di relazioni di consecutività, sebbene importante nel suo ambito, è meno generale del metodo che utilizza una relazione transitiva per definire l'ordine. Spesso, in una serie, esiste un numero infinito di termini intermedi tra due frazioni qualsiasi che possono essere selezionate, per quanto vicine possano essere. Si considerino, ad esempio, le frazioni in ordine di grandezza. Tra due frazioni qualsiasi ce ne sono altre, ad esempio la media aritmetica delle due. Di conseguenza, non

esiste una coppia di frazioni consecutive. Se dipendessimo dalla consecutività per definire l'ordine, non saremmo in grado di definire l'ordine di grandezza tra le frazioni. Ma in realtà le relazioni di maggiore e minore tra frazioni non richiedono la generazione da relazioni di consecutività, e le relazioni di maggiore e minore tra frazioni possiedono le tre caratteristiche necessarie per definire le relazioni seriali. In tutti questi casi, l'ordine deve essere definito per mezzo di una relazione *transitiva* , poiché solo tale relazione è in grado di superare un numero infinito di termini intermedi. Il metodo della consecutività, come quello del conteggio per determinare il numero di elementi di una collezione, è appropriato per il finito; può persino essere esteso a certe serie infinite, ovvero quelle in cui, sebbene il numero totale di termini sia infinito, il numero di termini tra due qualsiasi è sempre finito; ma non deve essere considerato generale. Non solo, ma bisogna fare attenzione a sradicare dall'immaginazione tutte le abitudini di pensiero derivanti dal supporre che sia generale. Se ciò non si fa, le serie in cui non ci sono termini consecutivi rimarranno difficili e sconcertanti. E tali serie sono di vitale importanza per la comprensione della continuità, dello spazio, del tempo e del movimento.

Esistono molti modi per generare serie, ma tutti dipendono dalla scoperta o dalla costruzione di una relazione connessa transitiva asimmetrica. Alcuni di questi metodi rivestono una notevole importanza. Possiamo prendere come esempio la generazione di serie mediante una relazione a tre termini che possiamo chiamare "tra". Questo metodo è molto utile in geometria e può servire da

introduzione alle relazioni con più di due termini; è opportuno introdurlo nell'ambito della geometria elementare.

Dati tre punti qualsiasi su una retta nello spazio ordinario, ce ne deve essere uno che si trova *tra* gli altri due. Questo non accadrà con i punti su una circonferenza o su qualsiasi altra curva chiusa, perché, dati tre punti qualsiasi su una circonferenza, possiamo spostarci da uno qualsiasi a qualsiasi altro senza passare per il terzo. Infatti, la nozione di “tra” è caratteristica delle serie aperte, o serie in senso stretto, in contrapposizione a quelle che si possono chiamare serie “cicliche” 39 , dove, come con le persone a tavola, un viaggio sufficiente ci riporta al punto di partenza. Questa nozione di “tra” può essere scelta come nozione fondamentale della geometria ordinaria; ma per ora considereremo solo la sua applicazione a una singola retta e all’ordinamento dei punti su una retta. [11] Prendendo due punti qualsiasi *a* , *b* , la retta (*ab*) è composta da tre parti (oltre *ad a* e *b* stessi):

(1) Punti tra *a* e *b* .

(2) Punti *x* tali che *a* sia compreso tra *x* e *b* . (3) Punti *y* tali che *b* sia compreso tra *y* e *a* .

Pertanto la linea (*ab*) può essere definita in termini della relazione “tra”.

Affinché questa relazione “tra” possa disporre i punti della linea in un ordine da sinistra a destra, abbiamo bisogno di alcune ipotesi, vale a dire le seguenti:

(1) Se qualcosa si trova tra *a* e *b* , *a* e *b* non sono identici.

(2) Tutto ciò che si trova tra *a* e *b* si trova anche tra *b* e *a* .

(3) Qualsiasi cosa compresa tra *a* e *b* non è identica ad *a* (né, di conseguenza, a *b* , in virtù di (2)).

(4) Se *x* è compreso tra *a* e *b* , qualsiasi cosa tra *a* e *x* è anche compresa tra *a* e *b* .

(5) Se *x* è compreso tra *a* e *b* , e *b* è compreso tra *x* e *y* , allora *b* è compreso tra *a* e *y* .

(6) Se *x* e *y* sono compresi tra *a* e *b* , allora o *x* e *y* sono identici, oppure *x* è compreso tra *a* e *y* , oppure *x* è compreso tra *y* e *b* .

(6) Se *b* è compreso tra *a* e *x* e anche tra *a* e *y* , allora o *x* e *y* sono identici, oppure *x* è compreso tra *b* e *y* , oppure *y* è compreso tra *b* e *x* .

Queste sette proprietà sono ovviamente verificate nel caso di punti su una retta nello spazio ordinario. Qualsiasi relazione a tre termini che le verifichi dà origine a serie, come si può vedere dalle seguenti definizioni. Per chiarezza, supponiamo che a *sia* a sinistra di *b* . Allora i punti 40 della retta (*ab*) sono (1) quelli tra i quali a e b *si trova* — questi li chiameremo a sinistra di *a* ; (2) *a* stesso; (3) quelli tra *a* e *b* ; (4) *b* stesso; (5) quelli tra i quali b e *a* si trova *b* — questi li chiameremo a destra di a.

b . Possiamo ora definire in generale che di due punti *x* , *y* , sulla retta (*ab*), diremo che *x* è “a sinistra” di *y* in uno qualsiasi dei seguenti casi:

(1) Quando *x* e *y* sono entrambi a sinistra di *a* , e *y* è tra *x* e *a* ;

(2) Quando *x* è a sinistra di *a* e *y* è *a* o *b* o tra *a* e *b* o a destra di *b* ;

(3) Quando *x* è *a* e *y* è compreso tra *a* e *b* oppure è *b* oppure è a destra di *b* ;

(4) Quando *x* e *y* sono entrambi compresi tra *a* e *b* , e *y* è compreso tra *x* e *b* ;

(6) Quando *x* è compreso tra *a* e *b* , e *y* è *b* o a destra di *b* ;

(6) Quando *x* è *b* e *y* è a destra di *b* ;

(6) Quando *x* e *y* sono entrambi a destra di *b* e *x* è tra *b* e *y* .

Si scoprirà che, dalle sette proprietà che abbiamo assegnato alla relazione "tra", si può dedurre che la relazione "a sinistra di", come definita sopra, è una relazione *seriale* nel senso in cui abbiamo definito tale termine. È importante notare che nulla nelle definizioni o nell'argomentazione dipende dal significato che attribuiamo a "tra" la relazione effettiva con questo nome che si verifica nello spazio empirico: qualsiasi relazione a tre termini che possieda le sette proprietà puramente formali di cui sopra servirà ugualmente bene allo scopo dell'argomentazione.

L'ordine ciclico, come quello dei punti su una circonferenza, non può essere generato per mezzo di relazioni a tre termini del tipo

"tra". Abbiamo bisogno di una relazione a quattro termini, che possiamo chiamare "separazione di coppie". Il concetto può essere illustrato considerando un viaggio intorno al mondo. Si può andare dall'Inghilterra alla Nuova Zelanda passando per Suez o per San Francisco; non possiamo affermare con certezza che uno di questi due luoghi sia "tra" l'Inghilterra e la Nuova Zelanda. Ma se un uomo sceglie quel percorso per fare il giro del mondo, in qualunque direzione lo percorra, i suoi tempi in Inghilterra e in Nuova Zelanda sono separati l'uno dall'altro dai suoi tempi a Suez e a San Francisco, e viceversa. Generalizzando, se prendiamo quattro punti qualsiasi su una circonferenza, possiamo separarli in due coppie, diciamo *a* e *b* e *x* e *y* , in modo tale che, per andare da *a* a *b* si debba passare per *x* o per *y* , e per andare da *x* a *y* si debba passare per *a* o per *b* . In queste circostanze diciamo che la coppia (*a* , *b*) è “separata” dalla coppia (*x* , *y*). Da questa relazione si può generare un ordine ciclico, in un modo simile a quello in cui abbiamo generato un ordine aperto da “tra”, ma un po’ più complicato. [12]

Lo scopo della seconda parte di questo capitolo è stato quello di suggerire l'argomento che potremmo definire "generazione di relazioni seriali". Una volta definite tali relazioni, la loro generazione a partire da altre relazioni che possiedono solo alcune delle proprietà richieste per le serie diventa di fondamentale importanza, soprattutto nella filosofia della geometria e della fisica. Tuttavia, nei limiti del presente volume, non possiamo fare altro che rendere il lettore consapevole

dell'esistenza di tale argomento.

Capitolo V Tipi di relazioni

Gran parte della filosofia della matematica si occupa delle *relazioni* , e molti tipi diversi di relazioni hanno diversi tipi di utilizzo. Spesso accade che una proprietà che appartiene a *tutte* le relazioni sia importante solo per quanto riguarda relazioni di certi tipi; in questi casi il lettore non coglierà la rilevanza della proposizione che afferma tale proprietà a meno che non abbia in mente i tipi di relazioni per cui essa è utile. Per ragioni di questa descrizione, così come per l'interesse intrinseco dell'argomento, è bene avere in mente un elenco approssimativo delle varietà di relazioni più utili dal punto di vista matematico.

Nel capitolo precedente abbiamo trattato una classe di relazioni di fondamentale importanza, ovvero le relazioni *seriali* . Ciascuna delle tre proprietà che abbiamo combinato per definire le serie – ovvero *asimmetria* , *transitività* e *connettività* – riveste una propria importanza. Inizieremo esaminando ciascuna di queste tre proprietà.

L'asimmetria , *ovvero* la proprietà di essere incompatibile con il suo inverso, è una caratteristica di grandissimo interesse e importanza. Per illustrarne le funzioni, considereremo diversi esempi. La relazione *"marito"* è asimmetrica, così come la relazione *"moglie"* ; *cioè,* se *a* è marito di *b* , *b* non può essere marito di *a* , e analogamente nel caso di *"moglie"* . D'altra parte, la relazione "coniuge" è simmetrica: se *a* è coniuge di *b* , allora *b* è coniuge di *a* . Supponiamo ora di avere la relazione *"coniuge"* e di voler derivare la relazione *"marito"* . *Marito* è sinonimo di *coniuge*

maschio o *coniuge di una femmina* ; quindi la relazione *"marito"* può essere derivata da " *coniuge* " limitando il dominio ai maschi o limitando il dominio inverso alle femmine. Da questo esempio si evince che, quando è data una relazione simmetrica, a volte è possibile, senza l'ausilio di ulteriori relazioni, separarla in due relazioni asimmetriche. Ma i casi in cui ciò è possibile sono rari ed eccezionali: sono casi in cui ci sono due classi mutuamente esclusive, diciamo α e β , tali che ogni volta che sussiste la relazione tra due termini, uno dei termini è un membro di α e l'altro è un membro di β —come, nel caso di *coniuge* , un termine

della relazione appartiene alla classe dei maschi e uno alla classe delle femmine. In tal caso, la relazione con il suo dominio confinato ad α sarà asimmetrica, così come lo sarà la relazione con il suo dominio confinato a β . Ma questi casi non sono del tipo che si verificano quando abbiamo a che fare con serie di più di due termini; infatti, in una serie, tutti i termini, eccetto il primo e l'ultimo (se esistono), appartengono sia al dominio che al dominio inverso della relazione generatrice, cosicché una relazione come *marito* , in cui il dominio e il dominio inverso non si sovrappongono, è esclusa.

La questione di come *costruire* relazioni dotate di una proprietà utile mediante operazioni su relazioni che possiedono solo i rudimenti di tale proprietà è di notevole importanza. La transitività e la connettività si costruiscono facilmente in molti casi in cui la relazione originariamente data non le possiede: ad esempio, se R è una qualsiasi relazione, la relazione ancestrale derivata da R per

induzione generalizzata è transitiva; e se R è una relazione molti-uno, la relazione ancestrale sarà connessa se confinata alla posterità di un dato termine. Ma l'asimmetria è una proprietà molto più difficile da garantire per costruzione. Il metodo con cui abbiamo derivato *"marito"* da *"coniuge"* non è, come abbiamo visto, disponibile nei casi più importanti, come *maggiore* , *prima* , *a destra di* , dove il dominio e il dominio inverso si sovrappongono. In tutti questi casi, possiamo ovviamente ottenere una relazione simmetrica sommando la relazione data e la sua inversa, ma non possiamo tornare da questa relazione simmetrica alla relazione asimmetrica originale se non con l'aiuto di una relazione asimmetrica . Prendiamo, ad esempio, la relazione *maggiore* : la relazione 24 *maggiore o minore* — cioè *disuguale* — è simmetrica, ma non c'è nulla in questa relazione che dimostri che sia la somma di due relazioni asimmetriche. Prendiamo una relazione come "differenza di forma". Questa non è la somma di una relazione asimmetrica e della sua inversa, poiché le forme non costituiscono un'unica serie; ma non c'è nulla che dimostri che differisce da " differenza di grandezza" se non sapessimo già che le grandezze hanno relazioni di maggiore e minore. Questo illustra il carattere fondamentale dell'asimmetria come proprietà delle relazioni.

Dal punto di vista della classificazione delle relazioni, l'asimmetria è una caratteristica molto più importante dell'implicazione di diversità. Le relazioni asimmetriche implicano diversità, ma non viceversa. "Disuguale", ad esempio, implica diversità, ma è simmetrica. In linea generale, possiamo affermare

che, se volessimo fare a meno, per quanto possibile, delle proposizioni relazionali e sostituirle con predicati attribuiti ai soggetti, potremmo riuscirci a patto di limitarci alle relazioni *simmetriche* : quelle che non implicano diversità, se transitive, possono essere considerate come affermazioni di un predicato comune, mentre quelle che implicano diversità possono essere considerate come affermazioni di predicati incompatibili. Si consideri, ad esempio, la relazione di *somiglianza tra classi* , mediante la quale abbiamo definito i numeri. Questa relazione è simmetrica e transitiva e non implica diversità. Sarebbe possibile, sebbene meno semplice della procedura che abbiamo adottato, considerare il numero di una collezione come un predicato della collezione stessa: in tal caso, due classi simili saranno due classi che hanno lo stesso predicato numerico, mentre due classi non simili saranno due classi che hanno predicati numerici diversi . Un tale metodo di sostituzione delle relazioni con predicati è formalmente possibile (sebbene spesso molto scomodo) finché le relazioni in questione sono simmetriche; ma è formalmente impossibile quando le relazioni sono asimmetriche, perché sia la somiglianza che la differenza dei predicati sono simmetriche. Le relazioni asimmetriche sono, possiamo dire , le più caratteristicamente relazionali tra le relazioni di tipo 45 , e le più importanti per il filosofo che desidera studiare la natura logica ultima delle relazioni.

Un'altra classe di relazioni di grande utilità è quella delle relazioni uno-a-molti, *ovvero* relazioni in cui al massimo un termine può avere un dato termine. Tali sono padre, madre, marito (tranne che

in Tibet), quadrato di, seno di e così via. Ma genitore, radice quadrata e così via non sono relazioni uno-a-molti. È possibile, formalmente, sostituire tutte le relazioni con relazioni uno-a-molti per mezzo di un apposito meccanismo. Prendiamo (per esempio) la relazione *"minore* " tra i numeri induttivi. Dato un qualsiasi numero *n* maggiore di 1 , non ci sarà un solo numero che ha la relazione " *minore* " con *n* , ma possiamo formare l'intera classe dei numeri minori di *n* . Questa è una classe, e la sua relazione con *n* non è condivisa da nessun'altra classe. Possiamo chiamare la classe dei numeri minori di *n* "la propria ascendenza" di *n* , nel senso in cui abbiamo parlato di ascendenza e posterità in relazione all'induzione matematica. Allora la "propria ascendenza" è una relazione uno-molti (*uno-molti* sarà sempre usato in modo da includere *uno-uno*), poiché ogni numero determina una singola classe di numeri come costituente la sua propria ascendenza. Quindi la relazione *minore di* può essere sostituita dall'appartenenza *alla propria ascendenza di* . In questo modo una relazione uno-molti in cui l'uno è una classe, insieme all'appartenenza a questa classe, può sempre sostituire formalmente una relazione che non è uno-molti. Peano, che per qualche ragione concepisce sempre istintivamente una relazione come uno-molti, tratta in questo modo quelle che naturalmente non lo sono. La riduzione a relazioni uno-molti con questo metodo, tuttavia, sebbene possibile dal punto di vista formale, non rappresenta una semplificazione tecnica, e ci sono tutte le ragioni per pensare che non rappresenti un'analisi filosofica, se non altro perché le classi devono essere considerate "finzioni

logiche”. Continueremo quindi a considerare le relazioni uno-molti come un tipo speciale di relazioni.

Le relazioni uno-molti sono presenti in tutte le frasi della forma "il tale di tale". "Il re d'Inghilterra", " la moglie di Socrate", "il padre di John Stuart Mill", e così via, descrivono tutti una persona per mezzo di una relazione uno-molti con un termine dato. Una persona non può avere più di un padre, quindi "il padre di John Stuart Mill" descrive una persona, anche se non sappiamo chi sia. Ci sarebbe molto da dire sull'argomento delle descrizioni, ma per ora ci occupiamo delle relazioni, e le descrizioni sono rilevanti solo in quanto esemplificano l'uso delle relazioni uno-molti. Va osservato che tutte le funzioni matematiche derivano da relazioni uno-molti: il logaritmo di *x* , il coseno di *x* , ecc., sono, come il padre di *x* , termini descritti per mezzo di una relazione uno-molti (logaritmo, coseno, ecc.) con un termine dato (*x*). Il concetto di *funzione* non deve essere limitato ai numeri, o agli usi a cui i matematici ci hanno abituato; può essere esteso a tutti i casi di relazioni uno-a-molti, e "il padre di *x* " è una funzione di cui *x* è l'argomento con la stessa legittimità con cui lo è "il logaritmo di *x* ". Le funzioni in questo senso sono funzioni *descrittive* . Come vedremo in seguito, esistono funzioni di tipo ancora più generale e fondamentale, vale a dire le funzioni *proposizionali* ; ma per il momento limiteremo la nostra attenzione alle funzioni descrittive, *cioè* "il termine avente la relazione R con *x* ", o, in breve, "l'R di *x* ", dove R è una qualsiasi relazione uno-a-molti.

Si osserverà che se “l’R di *x* ” deve descrivere un termine definito, *x* deve essere un termine a cui qualcosa ha la relazione R, e non deve esserci più di un termine avente la relazione R con *x* , poiché “il”, usato correttamente, deve implicare unicità. Quindi possiamo parlare di “il padre di *x* ” se *x* è un qualsiasi essere umano eccetto Adamo ed Eva; ma non possiamo parlare di “il padre di *x* ” se *x* è un tavolo o una sedia o qualsiasi altra cosa che non ha un padre. Diremo che l’R di *x* “esiste” quando c’è un solo termine, e non di più, avente la relazione R con *x* . Quindi se R è una relazione uno-a-molti, l’R di *x* esiste ogni volta che *x* appartiene al dominio inverso di R, e non altrimenti. Considerando “l’R di *x* ” come una funzione nel dominio matematico | In questo senso, diciamo che *x* è l'"argomento " della funzione, e se *y* è il termine che ha la relazione R con *x* , *cioè* se *y* è la R di *x* , allora *y* è il "valore" della funzione per l'argomento *x* . Se R è una relazione uno-a-molti, l'insieme degli argomenti possibili della funzione è il dominio inverso di R, e l'insieme dei valori è il dominio. Quindi l'insieme degli argomenti possibili della funzione "il padre di *x* " è tutto ciò che ha un padre, *cioè* il dominio inverso della relazione *padre* , mentre l'insieme dei valori possibili per la funzione è tutto ciò che è padre, *cioè* il dominio della relazione.

Molte delle nozioni più importanti nella logica delle relazioni sono funzioni descrittive, ad esempio: *inverso* , *dominio* , *dominio inverso* , *campo* . Altri esempi verranno presentati in seguito.

Tra le relazioni uno-molti, le relazioni *uno-uno* costituiscono una classe particolarmente importante. Abbiamo già avuto modo di

parlare di relazioni uno-uno in relazione alla definizione di numero, ma è necessario familiarizzare con esse, e non solo conoscerne la definizione formale. La loro definizione formale può essere derivata da quella delle relazioni uno-molti: possono essere definite come relazioni uno-molti che sono anche le inverse delle relazioni uno-molti, *ovvero* come relazioni che sono sia uno-molti che molti-uno. Le relazioni uno-molti possono essere definite come relazioni tali che, se *x* ha la relazione in questione con *y* , non esiste nessun altro termine *x* ' che abbia anch'esso la relazione con *y* . Oppure, ancora, possono essere definite come segue: dati due termini *x* e *x* ' , i termini con cui *x* ha la relazione data e quelli con cui *x* ' ce l'ha non hanno alcun elemento in comune. Oppure, ancora, possono essere definite come relazioni tali che il prodotto relativo di una di esse e della sua inversa implica l'identità, dove il "prodotto relativo" di due relazioni R e S è quella relazione che sussiste tra *x* e *z* quando esiste un termine intermedio *y* , tale che *x* ha la relazione R con *y* e *y* ha la relazione S con *z* . Quindi, ad esempio, se R è la relazione padre-figlio, il prodotto relativo di R e della sua inversa sarà la relazione che sussiste tra *x* e un uomo *z* quando esiste una persona *y* , tale che *x* è il padre di *y* e *y* è il figlio di *z* . È ovvio che *x* e *z* devono essere la stessa persona. 28 Se, d'altra parte, prendiamo la relazione genitore-figlio, che non è uno-molti, non possiamo più sostenere che, se *x* è un genitore di *y* e *y* è un figlio di *z* , *x* e *z* devono essere la stessa persona, perché uno può essere il padre di *y* e l'altro la madre. Ciò illustra che è caratteristico delle relazioni uno-a-molti quando il prodotto relativo di una relazione e

della sua inversa implica l'identità. Nel caso delle relazioni uno-a-uno ciò accade, e anche il prodotto relativo dell'inversa e della relazione implica l'identità. Data una relazione R, è conveniente, se *x*ha la relazione R a *y* , per pensare a *y* come raggiungibile da *x* tramite un "passo R" o un "vettore R". Allo stesso modo, *x* sarà raggiungibile da *y* tramite un "passo R all'indietro". Possiamo quindi affermare la caratteristica delle relazioni uno-molti di cui ci siamo occupati dicendo che un passo R seguito da un passo R all'indietro deve riportarci al punto di partenza. Con altre relazioni, questo non è affatto vero; ad esempio, se R è la relazione da figlio a genitore, il prodotto relativo di R e della sua inversa è la relazione "sé o fratello o sorella", e se R è la relazione da nipote a nonno, il prodotto relativo di R e della sua inversa è "sé o fratello o sorella o cugino di primo grado". Si osserverà che il prodotto relativo di due relazioni non è in generale commutativo, *cioè* il prodotto relativo di R e S non è in generale la stessa relazione del prodotto relativo di S e R. *Ad esempio,* il prodotto relativo di genitore e fratello è zio, ma il prodotto relativo di fratello e genitore è genitore.

Le relazioni biunivoche forniscono una correlazione tra due classi, termine per termine, in modo che ogni termine di una classe abbia il suo correlato nell'altra. Tali correlazioni sono più semplici da comprendere quando le due classi non hanno membri in comune, come la classe dei mariti e la classe delle mogli; in tal caso, infatti, sappiamo immediatamente se un termine deve essere considerato come quello *da* cui la relazione di correlazione R va, o come quello *verso* cui va. È conveniente usare il termine *referente*

per il termine *da* cui la relazione va, e il termine *relatum* per il termine *verso* cui va. Quindi, se *x* e *y* sono marito e moglie, allora, rispetto alla relazione " marito", *x* è referente e *y* è relatum , mentre rispetto alla relazione "moglie", *y* è referente e *x* è relatum. Diciamo che una relazione e la sua inversa hanno "senso" opposto; quindi il "senso" di una relazione che va da *x* a *y* è l'opposto di quello della corrispondente relazione da *y* a *x* . Il fatto che una relazione abbia un “senso” è fondamentale e costituisce una delle ragioni per cui l’ordine può essere generato da relazioni appropriate. Si osserverà che la classe di tutti i possibili referenti di una data relazione è il suo dominio, e la classe di tutte le possibili relazioni è il suo dominio inverso.

Ma accade molto spesso che il dominio e il dominio inverso di una relazione biunivoca si sovrappongano. Prendiamo, ad esempio, i primi dieci numeri interi (escluso 0) e aggiungiamo 1 a ciascuno; quindi invece dei primi dieci numeri interi ora abbiamo i numeri interi

2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 .

Questi sono gli stessi che avevamo prima, tranne per il fatto che 1 è stato troncato all'inizio e 11 è stato aggiunto alla fine. Ci sono ancora dieci numeri interi: sono correlati con i dieci precedenti dalla relazione di *n* a *n* + 1 , che è una relazione biunivoca. Oppure, ancora, invece di aggiungere 1 a ciascuno dei nostri dieci numeri interi originali, avremmo potuto raddoppiarli tutti, ottenendo così i numeri interi

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 18 , 18 , 20 .

Qui abbiamo ancora cinque dei nostri precedenti numeri interi, vale a dire 2 , 4 , 6 , 8 , 10. La relazione di correlazione in questo caso è la relazione di un numero con il suo doppio, che è ancora una relazione biunivoca. Oppure avremmo potuto sostituire ogni numero con il suo quadrato, ottenendo così l'insieme

1 , 2 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 62 , 81 , 100 .

In questa occasione rimangono solo tre elementi del nostro set originale, ovvero 1 , 2 , 9. Tali processi di correlazione possono essere variati all'infinito.

Il caso più interessante di questo tipo è quello in cui la nostra relazione biunivoca ha un dominio inverso che è parte, ma non l'intero, del dominio 50. Se, invece di confinare il dominio ai primi dieci numeri interi, avessimo considerato l'intero insieme dei numeri induttivi, gli esempi precedenti avrebbero illustrato questo caso. Possiamo disporre i numeri in questione in due righe, posizionando il correlato direttamente sotto il numero di cui è correlato. Quindi, quando il correlatore è la relazione da n a $n + 1$, abbiamo le due righe:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... n ...

2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ... $n + 1$ ...

Quando il correlatore è la relazione tra un numero e il suo doppio, abbiamo due righe:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... *n* ...

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ... 2 *n* ...

Quando il correlatore è la relazione tra un numero e il suo quadrato, le righe sono:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... *n* ...

1 , 2 , 9 , 16 , 25 , ... n^2 ...

In tutti questi casi, tutti i numeri induttivi compaiono nella riga superiore e solo alcuni in quella inferiore.

Casi di questo tipo, in cui il dominio inverso è una "parte propria" del dominio (*ovvero* una parte e non il tutto), ci riguarderanno nuovamente quando tratteremo l'infinito. Per ora, desideriamo solo notare che esistono e richiedono di essere presi in considerazione.

Un'altra classe di correlazioni spesso importante è quella delle "permutazioni", in cui il dominio e il dominio inverso coincidono. Si considerino, ad esempio, le sei possibili combinazioni di tre lettere:

UN,B, C

UN,C, B

B, C, UN

B, UN,C

C, UN,B

C, B, a |

Ciascuna di queste può essere ottenuta da una qualsiasi delle altre 51 tramite una correlazione. Prendiamo, ad esempio, la prima e l'ultima, (a, b, c) e (c, b, a). Qui *a* è correlato con *c* , *b* con se stesso e *c* con *a* . È ovvio che la combinazione di due permutazioni è a sua volta una permutazione, *ovvero* le permutazioni di una data classe formano quello che viene chiamato un "gruppo".

Questi vari tipi di correlazioni rivestono importanza in diverse connessioni, alcune per uno scopo, altre per un altro. La nozione generale di correlazione biunivoca ha un'importanza illimitata nella filosofia della matematica, come abbiamo già in parte visto, ma che vedremo molto più a fondo nel prosieguo.

Uno dei suoi utilizzi ci occuperà nel prossimo capitolo.

Capitolo VI Somiglianza delle relazioni

Nel Capitolo II abbiamo visto che due classi hanno lo stesso numero di termini quando sono "simili", *ovvero* quando esiste una relazione biunivoca il cui dominio è una classe e il cui dominio inverso è l'altra. In tal caso diciamo che esiste una "correlazione biunivoca" tra le due classi.

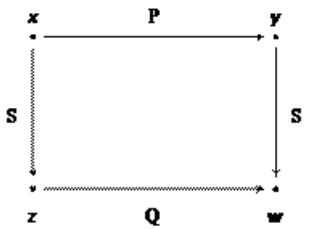
Nel presente capitolo dobbiamo definire una relazione tra relazioni, che svolgerà per esse lo stesso ruolo che la similarità tra classi svolge per le classi. Chiameremo questa relazione "somiglianza tra relazioni" o "somiglianza" quando sembrerà opportuno usare un termine diverso da quello che usiamo per le classi. Come si definisce la somiglianza?

Continueremo a utilizzare il concetto di correlazione: supporremo che il dominio di una relazione possa essere correlato con il dominio dell'altra, e il dominio inverso con il dominio inverso; ma questo non è sufficiente per il tipo di somiglianza che desideriamo tra le due relazioni. Ciò che desideriamo è che, ogniqualvolta una relazione sussista tra due termini, l'altra relazione sussista tra i correlati di questi due termini. L'esempio più semplice del tipo di cosa che desideriamo è una mappa. Quando un luogo si trova a nord di un altro, il luogo sulla mappa corrispondente al primo si trova sopra il luogo sulla mappa corrispondente all'altro; quando un luogo si trova a ovest di un altro, il luogo sulla mappa corrispondente al primo si trova a sinistra del luogo sulla mappa corrispondente all'altro; e così via. La struttura della mappa corrisponde a quella del paese di cui è una mappa. Le relazioni

spaziali nella mappa hanno una "somiglianza" con le relazioni spaziali nel paese rappresentato. È questo tipo di connessione tra relazioni che desideriamo definire.

Innanzitutto, possiamo introdurre utilmente una certa restrizione. Ci limiteremo, nel definire la somiglianza, a quelle relazioni che hanno "campi", *cioè* a quelle che permettono la formazione di un'unica classe a partire dal dominio e dal dominio inverso. Non è sempre così. Prendiamo, ad esempio, la relazione "dominio", *cioè* la relazione che il dominio di una relazione ha con la relazione stessa. Questa relazione ha tutte le classi come dominio, poiché ogni classe è il dominio di qualche relazione; e ha tutte le relazioni come dominio inverso, poiché ogni relazione ha un dominio. Ma classi e relazioni non possono essere sommate per formare una nuova singola classe, perché sono di "tipi" logici diversi . Non è necessario addentrarci nella difficile dottrina dei tipi, ma è bene sapere quando ci asteniamo dall'affrontarla. Possiamo dire, senza entrare nei motivi di tale affermazione, che una relazione ha un "campo" solo quando è ciò che chiamiamo "omogenea", *cioè* quando il suo dominio e il suo dominio inverso sono dello stesso tipo logico; E come indicazione approssimativa di cosa intendiamo per "tipo", possiamo dire che gli individui, le classi di individui, le relazioni tra individui, le relazioni tra classi, le relazioni delle classi con gli individui, e così via, sono tipi diversi . Ora, la nozione di somiglianza non è molto utile se applicata a relazioni non omogenee; pertanto, nel definire la somiglianza, semplificheremo il problema parlando del "campo" di una delle relazioni in questione. Questo limita in qualche modo la generalità

della nostra definizione, ma la limitazione non ha alcuna importanza pratica. E, una volta enunciata, non è più necessario ricordarla.



Possiamo definire due relazioni P e Q come “simili”, o come aventi “somiglianza”, quando esiste una relazione biunivoca S il cui dominio è il campo di P e il cui dominio inverso è il campo di Q, e che è tale che, se un termine ha la relazione P con un altro, il correlato 54 dell'uno ha la relazione Q con il correlato dell'altro, e *viceversa* . Una figura renderà questo più chiaro. Siano *x* e *y* due termini aventi la relazione P. Allora devono esistere due termini *z* , *w* , tali che *x* abbia la relazione S con *z* , *y* abbia la relazione S con *w* e *z* abbia la relazione Q con *w* . Se ciò accade con ogni coppia

di termini come *x* e *y* , e se il contrario si verifica con ogni coppia di termini come *z* e *w* , è chiaro che per ogni caso in cui vale la relazione P esiste un caso corrispondente in cui vale la relazione Q, e *viceversa* ; ed è questo che desideriamo garantire con la nostra definizione. Possiamo eliminare alcune ridondanze nello schema di definizione sopra riportato, osservando che, quando le condizioni di cui sopra sono realizzate, la relazione P è la stessa del prodotto relativo di S e Q e del contrario di S, *ovvero* il passo P da *x* a *y* può essere sostituito dalla successione del passo S da *x* a *z* , del passo Q da *z* a *w* e del passo S all'indietro da *w* a *y* . Pertanto possiamo stabilire le seguenti definizioni:

Una relazione S si dice "correlatore" o "correlatore ordinale" di due relazioni P e Q se S è iniettiva, ha come dominio inverso il campo di Q ed è tale che P è il prodotto relativo di S e Q e l'inverso di S.

Si dice che due relazioni P e Q siano "simili" o "affette" quando esiste almeno una correlazione tra P e Q.

Si scoprirà che queste definizioni produrranno ciò che abbiamo ritenuto necessario in precedenza.

Si scoprirà che, quando due relazioni sono simili, condividono tutte le proprietà che non dipendono dai termini effettivi nei loro campi. Ad esempio, se una implica diversità, lo fa anche l'altra; se una è transitiva, lo è anche l'altra; se una è connessa, lo è anche l'altra. Quindi, se una è seriale, lo è anche l'altra. Ancora, se una è uno-molti o uno-uno, l'altra è uno-molti o uno-uno; e così via, attraverso tutte le 55 proprietà generali delle relazioni. Persino le affermazioni che coinvolgono i termini effettivi del campo di una relazione, sebbene possano non essere vere così come sono quando applicate a una relazione simile, saranno sempre traducibili in affermazioni analoghe. Tali considerazioni ci conducono a un problema che, nella filosofia matematica, ha un'importanza finora non adeguatamente riconosciuta. Il nostro problema può essere formulato come segue:

Data un'affermazione in una lingua di cui conosciamo la grammatica e la sintassi, ma non il vocabolario, quali sono i

possibili significati di tale affermazione e quali sono i significati delle parole sconosciute che la renderebbero vera?

Il motivo per cui questa domanda è importante è che rappresenta, molto più fedelmente di quanto si possa immaginare, lo stato della nostra conoscenza della natura. Sappiamo che certe proposizioni scientifiche – che, nelle scienze più avanzate, sono espresse in simboli matematici – sono più o meno vere per il mondo, ma siamo molto disorientati riguardo all'interpretazione da dare ai termini che compaiono in queste proposizioni. Sappiamo molto di più (per usare, per un momento, un'espressione un po' antiquata) sulla *forma* della natura che sulla *materia* . Di conseguenza, ciò che sappiamo realmente quando enunciamo una legge di natura è solo che probabilmente esiste *un'interpretazione* dei nostri termini che renderà la legge approssimativamente vera. Pertanto, assume grande importanza la domanda: quali sono i possibili significati di una legge espressa in termini di cui non conosciamo il significato sostanziale, ma solo la grammatica e la sintassi? Ed è proprio questa la domanda suggerita sopra.

Per il momento tralasceremo la questione generale, che ci riguarderà in seguito; è necessario prima approfondire il tema della somiglianza in sé.

Poiché, quando due relazioni sono simili, le loro proprietà sono le stesse tranne quando dipendono dal fatto che i campi siano composti proprio dai termini di cui sono composte, è auspicabile avere una nomenclatura che raccolga tutte le relazioni simili a

una data relazione. Così come abbiamo chiamato l'insieme di quelle classi simili a una data classe il "numero" di quella classe, allo stesso modo possiamo chiamare l'insieme di tutte quelle relazioni simili a una data relazione il "numero" di quella relazione. Ma per evitare confusione con i numeri propri delle classi, in questo caso parleremo di un "numero di relazione". Abbiamo quindi le seguenti definizioni:

Il “numero di relazione” di una data relazione è la classe di tutte quelle relazioni che sono simili alla relazione data.

I “numeri di relazione” sono l’insieme di tutte quelle classi di relazioni che sono numeri di relazione di varie relazioni; o, il che è lo stesso, un numero di relazione è una classe di relazioni costituita da tutte quelle relazioni che sono simili a un membro della classe.

Quando è necessario parlare dei numeri delle classi in modo tale da non confonderli con i numeri di relazione, li chiameremo “numeri cardinali”. Pertanto, i numeri cardinali sono i numeri propri delle classi. Questi includono i normali numeri interi della vita quotidiana, e anche alcuni numeri infiniti, di cui parleremo più avanti. Quando parliamo di “numeri” senza specificazioni, si intende che ci riferiamo ai numeri *cardinali* . La definizione di numero cardinale, come si ricorderà, è la seguente:

Il “numero cardinale” di una data classe è l’insieme di tutte le classi simili alla classe data.

L'applicazione più ovvia dei numeri di relazione è alle *serie* . Due serie possono essere considerate di uguale lunghezza quando hanno lo stesso numero di relazione. Due serie *finite* avranno lo stesso numero di relazione quando i loro campi hanno lo stesso numero cardinale di termini, e solo allora: *cioè* una serie di (diciamo) 15 termini avrà lo stesso numero di relazione di qualsiasi altra serie di quindici termini, ma non avrà lo stesso numero di relazione di una serie di 14 o 16 termini, né, ovviamente, lo stesso numero di relazione di una relazione che non è seriale. Quindi, nel caso piuttosto particolare delle serie finite, c'è parallelismo tra numeri cardinali e numeri di relazione. I numeri di relazione applicabili alle serie possono essere chiamati "numeri seriali" 57 (quelli che comunemente vengono chiamati "numeri ordinali" sono una sottoclasse di questi); quindi un numero seriale finito è determinato quando conosciamo il numero cardinale di termini nel campo di una serie avente il numero seriale in questione. Se *n* è un numero cardinale finito, il numero di relazione di una serie con *n* termini è chiamato numero "ordinale" *n* . (Esistono anche numeri ordinali infiniti, ma di questi parleremo in un capitolo successivo.) Quando il numero cardinale dei termini nel campo di una serie è infinito, il numero di relazione della serie non è determinato semplicemente dal numero cardinale; infatti, per un numero cardinale infinito esistono infiniti numeri di relazione, come vedremo quando prenderemo in considerazione le serie infinite. Quando una serie è infinita, quella che possiamo chiamare la sua "lunghezza", *cioè* il suo numero di

relazione, può variare senza che cambi il numero cardinale; ma quando una serie è finita, questo non può accadere.

Possiamo definire l'addizione e la moltiplicazione sia per i numeri di relazione che per i numeri cardinali, e si può sviluppare un'intera aritmetica dei numeri di relazione. Il modo in cui ciò deve essere fatto è facilmente comprensibile considerando il caso delle serie. Supponiamo, ad esempio, di voler definire la somma di due serie non sovrapposte in modo tale che il numero di relazione della somma possa essere definito come la somma dei numeri di relazione delle due serie. In primo luogo, è chiaro che esiste un *ordine* tra le due serie: una di esse deve essere posta prima dell'altra. Quindi, se P e Q sono le relazioni generatrici delle due serie, nella serie che è la loro somma con P posto prima di Q, ogni elemento del campo di P precederà ogni elemento del campo di Q. Pertanto, la relazione seriale che deve essere definita come la somma di P e Q non è semplicemente "P o Q", ma "P o Q o la relazione di qualsiasi elemento del campo di P con qualsiasi elemento del campo di Q". Supponendo che P e Q non si sovrappongano, questa relazione è seriale, ma “P o Q” non è seriale, non essendo connesso, poiché non sussiste tra un membro del campo di P e un membro del campo di Q. Pertanto, la somma di P e Q, come definita sopra, è ciò di cui abbiamo bisogno per definire la somma 58 di due numeri di relazione. Modifiche simili

sono necessarie per prodotti e potenze. L'aritmetica risultante non obbedisce alla proprietà commutativa: la somma o il

prodotto di due numeri di relazione dipende generalmente dall'ordine in cui vengono presi. Tuttavia, obbedisce alla proprietà associativa, a una forma della proprietà distributiva e a due delle leggi formali per le potenze, non solo applicate ai numeri seriali, ma anche ai numeri di relazione in generale. L'aritmetica relazionale, infatti, sebbene recente, è una branca della matematica assolutamente rispettabile.

Non si deve supporre, solo perché le serie offrono l'applicazione più ovvia dell'idea di somiglianza, che non esistano altre applicazioni importanti. Abbiamo già menzionato le mappe e potremmo estendere le nostre riflessioni da questo esempio alla geometria in generale. Se il sistema di relazioni mediante il quale una geometria viene applicata a un certo insieme di termini può essere pienamente ricondotto a relazioni di somiglianza con un sistema applicabile a un altro insieme di termini, allora la geometria dei due insiemi è indistinguibile dal punto di vista matematico, *ovvero* tutte le proposizioni sono le stesse, tranne per il fatto che vengono applicate in un caso a un insieme di termini e nell'altro a un altro. Possiamo illustrare questo concetto con le relazioni del tipo che possiamo definire "tra", che abbiamo considerato nel Capitolo IV. Lì abbiamo visto che, a condizione che una relazione a tre termini abbia certe proprietà logiche formali, darà origine a serie e potrà essere chiamata "relazione tra". Dati due punti qualsiasi, possiamo usare la relazione tra per definire la retta determinata da quei due punti; esso consiste di *a* e *b* insieme a tutti i punti *x* , tali che la relazione tra valga tra i tre punti *a* , *b* , *x* in un ordine o nell'altro. È stato dimostrato da O.

Veblen che possiamo considerare il nostro intero spazio come il campo di una relazione tra tre termini e definire la nostra geometria mediante le proprietà che assegniamo alla nostra relazione tra. [13] Ora la somiglianza è altrettanto facilmente definibile tra relazioni a tre termini 59 come tra relazioni a due termini. Se B e B ' sono due relazioni tra, in modo che " *x* B(*y* , *z*)" significhi " *x* è tra *y* e *z* rispetto a B", chiameremo S un correlatore di B e B ' se ha il campo di B ' per il suo dominio inverso, ed è tale che la relazione B valga tra tre termini quando B ' vale tra i loro S-correlati, e solo allora. Diremo che B è simile a B ' quando esiste almeno un correlatore di B con B ' . Il lettore può facilmente convincersi che, se B è simile a B ' in questo senso, non può esserci alcuna differenza tra la geometria generata da B e quella generata da B ' .

Ne consegue che il matematico non deve preoccuparsi dell'essere particolare o della natura intrinseca dei suoi punti, linee e piani, nemmeno quando specula come matematico *applicato* . Possiamo dire che esiste una prova empirica della verità approssimativa di quelle parti della geometria che non sono questioni di definizione. Ma non esiste una prova empirica su cosa debba essere un "punto". Deve essere qualcosa che soddisfi il più possibile i nostri assiomi, ma non deve essere "molto piccolo" o "senza parti". Che sia o meno tali cose è indifferenza , purché soddisfi gli assiomi. Se possiamo, a partire da materiale empirico, costruire una struttura logica, per quanto complessa, che soddisfi i nostri assiomi geometrici, quella struttura può essere legittimamente chiamata "punto". Non dobbiamo dire che non ci

sia nient'altro che potrebbe legittimamente essere chiamato "punto"; Dobbiamo solo dire: "Questo oggetto che abbiamo costruito è sufficiente per il geometra; può essere uno dei tanti oggetti, ognuno dei quali sarebbe sufficiente , ma questo non ci riguarda, poiché questo oggetto è sufficiente a convalidare la verità empirica della geometria, nella misura in cui la geometria non è una questione di definizione". Questa è solo un'illustrazione del principio generale secondo cui ciò che conta in matematica, e in larga misura nelle scienze fisiche, non è la natura intrinseca dei nostri termini, ma la natura logica delle loro interrelazioni.

Possiamo dire, di due relazioni simili, che hanno la stessa | "struttura". Per scopi matematici (ma non per quelli della filosofia pura) l'unica cosa importante di una relazione sono i casi in cui essa è valida, non la sua natura intrinseca. Proprio come una classe può essere definita da vari concetti diversi ma coestensivi, *ad esempio* "uomo" e "bipede senza piume", così due relazioni concettualmente diverse possono essere valide nello stesso insieme di casi. Un "caso" in cui una relazione è valida deve essere concepito come una coppia di termini, con un ordine, in modo che uno dei termini venga prima e l'altro dopo; la coppia deve essere, ovviamente, tale che il suo primo termine abbia la relazione in questione con il suo secondo. Prendiamo (per esempio) la relazione "padre": possiamo definire quella che potremmo chiamare l'"estensione" di questa relazione come la classe di tutte le coppie ordinate (x , y) tali che x è il padre di y . Dal punto di vista matematico, l'unica cosa importante della

relazione "padre" è che definisce questo insieme di coppie ordinate.

In generale, diciamo:

L'"estensione" di una relazione è la classe di quelle coppie ordinate (*x* , *y*) tali che *x* ha la relazione in questione con *y* .

Possiamo ora fare un ulteriore passo avanti nel processo di astrazione e considerare cosa intendiamo per "struttura". Data una qualsiasi relazione, possiamo, se è sufficientemente semplice , costruirne una mappa. Per chiarezza, prendiamo una relazione la cui estensione è costituita dalle seguenti coppie: *ab* , *ac* , *ad* , *bc* , *ce* , *dc* , *de* , dove *a* , *b* , *c* , *d* , *e* sono cinque termini, indipendentemente da cosa. Possiamo fare una

È possibile tracciare una "mappa" di questa relazione prendendo cinque punti su un piano e collegandoli con delle frecce, come nella figura allegata. Ciò che emerge dalla mappa è quella che chiamiamo la "struttura" della relazione.

È chiaro che la "struttura" della relazione non dipende

sui termini particolari che costituiscono il campo della relazione. Il campo può essere modificato senza modificare la struttura, e la struttura può essere modificata senza modificare il campo; ad esempio , 61 se dovessimo aggiungere la coppia *ae* nell'illustrazione precedente, dovremmo modificare la struttura ma non il campo. Due relazioni hanno la stessa "struttura", diremo, quando la stessa mappa è valida per entrambe, o, il che

equivale a dire lo stesso, quando una può essere una mappa per l'altra (poiché ogni relazione può essere la propria mappa). E questo, come dimostra una breve riflessione, è esattamente la stessa cosa di ciò che abbiamo chiamato "somiglianza". Vale a dire, due relazioni hanno la stessa struttura quando hanno somiglianza, *cioè* quando hanno lo stesso numero di relazione. Quindi ciò che abbiamo definito "numero di relazione" è esattamente la stessa cosa che è oscuramente intesa dalla parola "struttura", una parola che, per quanto importante, non viene mai (per quanto ne sappiamo) definita in termini precisi da coloro che la usano.

Nella filosofia tradizionale si è assistito a una grande speculazione che si sarebbe potuta evitare se si fosse compresa l'importanza della struttura e la difficoltà di comprenderla appieno. Ad esempio, si afferma spesso che spazio e tempo siano soggettivi, ma che abbiano controparti oggettive; oppure che i fenomeni siano soggettivi, ma causati da entità in sé, le quali devono necessariamente presentare differenze tra loro *corrispondenti* alle differenze nei fenomeni a cui danno origine. Quando si formulano tali ipotesi, si presume generalmente che si possa sapere ben poco delle controparti oggettive. In realtà, tuttavia, se le ipotesi così come enunciate fossero corrette, le controparti oggettive formerebbero un mondo avente la stessa struttura del mondo fenomenico, permettendoci di dedurre dai fenomeni la verità di tutte le proposizioni che possono essere espresse in termini astratti e che sappiamo essere vere per i fenomeni stessi. Se il mondo fenomenico ha tre dimensioni, così

deve essere anche il mondo al di là dei fenomeni; se il mondo fenomenico è euclideo, così deve essere anche l'altro; e così via. In breve, ogni proposizione avente un significato comunicabile deve essere vera per entrambi i mondi o per nessuno dei due: l'unica differenza deve risiedere proprio in quell'essenza di individualità che sfugge sempre alle parole e ostacola la descrizione, ma che, proprio per questo motivo, è irrilevante per la scienza. Ora, l'unico scopo che i filosofi si prefiggono nel condannare i fenomeni è quello di persuadere se stessi e gli altri che il mondo reale è molto diverso dal mondo delle apparenze. Possiamo tutti simpatizzare con il loro desiderio di dimostrare una proposizione così auspicabile, ma non possiamo congratularci con loro per il loro successo. È vero che molti di loro non affermano controparti oggettive ai fenomeni, e queste sfuggono all'argomentazione di cui sopra. Coloro che affermano controparti sono, di norma, molto reticenti sull'argomento, probabilmente perché sentono istintivamente che, se approfondito, porterebbe a un eccessivo *avvicinamento* tra il mondo reale e quello fenomenico. Se approfondissero l'argomento, difficilmente potrebbero evitare le conclusioni che abbiamo suggerito. In questi, come in molti altri, il concetto di struttura o di numero di relazione è importante.

Capitolo VII Numeri razionali, reali e complessi

Abbiamo visto come definire i numeri cardinali e anche i numeri relazionali, di cui quelli che comunemente vengono chiamati numeri ordinali sono una specie particolare. Si scoprirà che ciascuno di questi tipi di numero può essere infinito così come finito. Ma nessuno dei due è in grado, allo stato attuale, di realizzare le estensioni più familiari dell'idea di numero, vale a dire le estensioni ai numeri negativi, frazionari, irrazionali e complessi. In questo capitolo forniremo brevemente definizioni logiche di queste varie estensioni.

Uno degli errori che hanno ritardato la scoperta di definizioni corrette in questo ambito è l'idea comune che ogni estensione del concetto di numero includesse i tipi precedenti come casi particolari. Si pensava che, trattando di numeri interi positivi e negativi, i numeri interi positivi potessero essere identificati con i numeri interi senza segno originari. Allo stesso modo, si pensava che una frazione il cui denominatore è 1 potesse essere identificata con il numero naturale che ne costituisce il numeratore. E si supponeva che i numeri irrazionali, come la radice quadrata di 2 , trovassero il loro posto tra le frazioni razionali, essendo maggiori di alcune di esse e minori di altre, in modo che i numeri razionali e irrazionali potessero essere considerati insieme come un'unica classe, chiamata "numeri reali". Quando il concetto di numero venne ulteriormente esteso fino a includere i numeri "complessi", *ovvero* i numeri che coinvolgono la radice quadrata di -1 , si pensò che i numeri reali

potessero essere considerati come quelli tra i numeri complessi in cui la parte immaginaria (cioè la *parte* che era un multiplo della radice quadrata di -1) era zero. Tutte queste supposizioni erano errate e, come vedremo, devono essere scartate se si vogliono dare definizioni corrette.

Cominciamo con *gli interi positivi e negativi* . È ovvio, a una prima riflessione, che +1 e -1 devono essere entrambe relazioni, e di fatto devono essere l'una l'inversa dell'altra. La definizione ovvia e sufficiente è che +1 è la relazione di *n* +1 a n , e -1 è la relazione di *n a n +1*. *In generale, se m è un numero induttivo qualsiasi, +m sarà la relazione di n + m a n (* per *ogni* n) , *e* -m *sarà* la *relazione* di *n* a *n* + *m* . Secondo questa *definizione* , + m è una *relazione biunivoca* finché *n* è un numero cardinale (finito o infinito) e *m* è un numero cardinale induttivo. Ma + *m* non può in alcun caso essere identificato con *m , che non è una relazione, bensì* una classe di classi. Infatti, + *m* è distinto da *m* tanto quanto -m .

Le frazioni sono più interessanti degli interi positivi o negativi. Abbiamo bisogno delle frazioni per molti scopi, ma forse il più ovvio è quello della misurazione. Il mio amico e collaboratore Dr. AN Whitehead ha sviluppato una teoria delle frazioni specificamente adattata alla loro applicazione alla misurazione, che è esposta in *Principia Mathematica* . [14] Ma se tutto ciò che serve è definire oggetti che abbiano le proprietà puramente matematiche richieste, questo scopo può essere raggiunto con un metodo più semplice, che adotteremo qui. Definiremo la frazione *m/n* come quella relazione che sussiste tra due numeri induttivi *x*

e *y* quando *xn* = *ym* . Questa definizione ci permette di dimostrare che *m/n* è una relazione biunivoca, a condizione che né *m* né *n* siano zero. E naturalmente *n/m* è la relazione inversa a *m/n* . Dalla definizione di cui sopra è chiaro che la frazione *m/* 1 è quella relazione tra due interi *x* e *y* che consiste nel fatto che *x* = *my* . Questa relazione, come la relazione + *m* , non è in alcun modo in grado di essere identificata con il numero cardinale induttivo *m* , perché una relazione e una classe di classi sono oggetti di tipi completamente diversi . [15] Si vedrà che 650 */n* è sempre la stessa relazione, qualunque sia il numero induttivo *n* ; è, in breve, la relazione di 0 con qualsiasi altro cardinale induttivo. Possiamo chiamarlo lo zero dei numeri razionali; non è, ovviamente, identico al numero cardinale 0. Viceversa, la relazione *m/* 0 è sempre la stessa, qualunque sia il numero induttivo *m* . Non esiste alcun cardinale induttivo corrispondente a *m/* 0 . Possiamo chiamarlo "l'infinito dei razionali". È un esempio del tipo di infinito che è tradizionale in matematica e che è rappresentato da " ∞ ". Questo è un tipo totalmente diverso . Diverso dal vero infinito cantoriano, che prenderemo in considerazione nel prossimo capitolo. L'infinito dei razionali non richiede, per la sua definizione o il suo utilizzo, classi infinite o numeri interi infiniti. In realtà non è una nozione molto importante, e potremmo farne a meno del tutto se ci fosse uno scopo nel farlo. L'infinito cantoriano, d'altra parte, è di fondamentale importanza; la sua comprensione apre la strada a nuovi orizzonti della matematica e della filosofia.

Si osserverà che lo zero e l'infinito, unici tra i rapporti, non sono iniettivi. Lo zero è iniettivo (uno-molti), e l'infinito è molti-uno.

Non c'è alcuna difficoltà nel definire *maggiore* e *minore* tra rapporti (o frazioni). Dati due rapporti *m/n* e *p/q* , diremo che *m/n* è *minore* di *p/q* se *mq* è minore di *pn* . Non c'è difficoltà nel dimostrare che la relazione "minore di", così definita, è seriale, in modo che i rapporti formino una serie in ordine di grandezza. In questa serie, zero è il termine più piccolo e infinito è il più grande. Se omettiamo zero e infinito dalla nostra serie, non esiste più alcun rapporto più piccolo o più grande; è ovvio che se *m/n* è un rapporto diverso da zero e infinito, *m/* 2n è minore e 2m */n è* maggiore, sebbene nessuno dei due sia zero o infinito, quindi *m/n* non è né il rapporto più piccolo né quello più grande, 22 e pertanto (quando zero e infinito vengono omessi) non esiste un rapporto più piccolo o più grande, poiché *m/n* è stato scelto arbitrariamente. Allo stesso modo possiamo dimostrare che, per quanto due frazioni possano essere quasi uguali, esistono sempre altre frazioni tra di esse. Infatti, sia *m/n*

e siano *p/q* due frazioni, di cui *p/q* è la maggiore. Allora è facile vedere (o dimostrare) che (*m* + *p*) / (*n* + *q*) sarà maggiore di *m/n* e minore di *p/q* . Quindi la serie di rapporti è una in cui nessun termine è consecutivo a due, ma ci sono sempre altri termini tra due qualsiasi. Poiché ci sono altri termini tra questi altri, e così via *all'infinito* , è ovvio che esiste un numero infinito di rapporti tra due qualsiasi, per quanto quasi uguali possano essere questi due. [16] Una serie che ha la proprietà che ci sono sempre altri termini tra due qualsiasi, in modo che nessuno sia consecutivo a due, è detta “compatta”. Quindi i rapporti in ordine di grandezza formano una serie “compatta”. Tali serie hanno molte proprietà importanti,

ed è importante osservare che i rapporti forniscono un esempio di una serie compatta generata in modo puramente logico, senza alcun riferimento allo spazio o al tempo o a qualsiasi altro dato empirico.

I rapporti positivi e negativi possono essere definiti in modo analogo a quello utilizzato per definire gli interi positivi e negativi. Dopo aver definito la somma di due rapporti *m/n* e *p/q* come (*mq* + *pn*) */nq* , definiamo + *p/q* come la relazione tra *m/n* + *p/q* e *m/n* , dove *m/n* è un rapporto qualsiasi; e −p */q* è ovviamente l'inverso di + *p/q* . Questo non è l'unico modo possibile per definire i rapporti positivi e negativi, ma è un modo che, per il nostro scopo, ha il pregio di essere un adattamento ovvio del metodo adottato nel caso degli interi.

Passiamo ora a un'estensione più interessante del concetto di numero, *ovvero* l'estensione a quelli che vengono chiamati numeri "reali", che sono quelli che comprendono gli irrazionali. Nel Capitolo I abbiamo avuto modo di menzionare gli "incommensurabili" e la loro scoperta 167 da parte di Pitagora. Fu attraverso di essi, *cioè* attraverso la geometria, che si iniziò a pensare ai numeri irrazionali. Un quadrato il cui lato è lungo un pollice avrà una diagonale la cui lunghezza è la radice quadrata di 2 pollici. Ma, come scoprirono gli antichi, non esiste alcuna frazione del quale il quadrato sia 2. Questa proposizione è dimostrata nel decimo libro di Euclide, uno di quei libri che gli scolari supponevano fossero fortunatamente andati perduti ai tempi in cui Euclide era ancora usato come libro di testo. La

dimostrazione è straordinariamente semplice. Se possibile, sia *m/n* la radice quadrata di 2 , in modo che $m^2/n^2 = 2$, *cioè* $m^2 = 2n^2$. Quindi m^2 è un numero pari, e quindi *m* deve essere un numero pari, perché il quadrato di un numero dispari è dispari. Ora, se *m* è pari, m^2 deve dividere per 4 ,

perché se *m* = 2p *,* allora *m2* = 4p2 . Quindi avremo $^{4p2} = 2n2$, dove *p è la* metà di *m* . Quindi $^{2p2} = n2$, e pertanto $^{n}/p$ *sarà* anche la radice quadrata di $^{2.}$ Ma allora possiamo ripetere l'argomento: se n = 2q , *p /q* sarà anche la radice quadrata di 2, e così via, attraverso una serie infinita di numeri che sono ciascuno la metà del suo predecessore. Ma questo è impossibile; se dividiamo un numero per 2, e poi dimezziamo la metà, e così via, dobbiamo raggiungere un numero dispari dopo un *numero* finito di passaggi . Oppure possiamo semplificare ulteriormente l'argomento supponendo che l' *m/n* da cui partiamo sia ridotto ai minimi termini; in tal caso, *m* e *n* non possono essere entrambi pari; tuttavia abbiamo visto che, se $m^2/n^2 = 2$, devono esserlo. Pertanto non può esistere alcuna frazione *m/n* il cui quadrato sia 2 .

Pertanto, nessuna frazione esprimerà esattamente la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato misura un pollice. Questa sembra una sfida lanciata dalla natura all'aritmetica. Per quanto l'aritmetico possa vantarsi (come fece Pitagora) della potenza dei numeri, la natura sembra in grado di confonderlo mostrando lunghezze che nessun numero può stimare in termini di unità. Ma il problema non rimase confinato a questa forma geometrica. Non appena fu inventata l'algebra, lo stesso problema si presentò per

quanto riguarda la soluzione delle equazioni, sebbene in questo caso assunse una forma più ampia, poiché coinvolgeva anche i numeri complessi.

È chiaro che si possono trovare frazioni che si avvicinano sempre di più ad avere il loro quadrato 28 uguale a 2. Possiamo formare una serie crescente di frazioni i cui quadrati sono tutti minori di 2 , ma che differiscono da 2 nei termini successivi di una quantità inferiore a qualsiasi valore assegnato. Vale a dire, supponiamo di assegnare in anticipo una piccola quantità, diciamo un miliardesimo, si scoprirà che tutti i termini della nostra serie dopo un certo numero, diciamo il decimo, hanno quadrati che differiscono da 2 di una quantità inferiore a questa. E se avessi assegnato una quantità ancora più piccola, sarebbe stato necessario proseguire lungo la serie, ma prima o poi avremmo raggiunto un termine della serie, diciamo il ventesimo, dopo il quale tutti i termini avrebbero avuto quadrati che differiscono da 2 di una quantità ancora più piccola. Se ci mettessimo a estrarre la radice quadrata di 2 con la solita regola aritmetica, otterremmo un decimale infinito che, portato a un certo numero di cifre decimali, soddisfa esattamente le condizioni di cui sopra. Possiamo altrettanto bene formare una serie decrescente di frazioni i cui quadrati siano tutti maggiori di 2 , ma che aumentino di quantità sempre minori man mano che ci avviciniamo ai termini successivi della serie, e che differiscano , prima o poi, di una quantità inferiore a quella assegnata. In questo modo sembrerebbe che stiamo tracciando un cordone attorno alla radice quadrata di 2 , e potrebbe sembrare difficile credere che

essa possa sfuggirci per sempre. Tuttavia, non è con questo metodo che raggiungeremo effettivamente la radice quadrata di 2 .

Se dividiamo *tutti* i rapporti in due classi, a seconda che i loro quadrati siano minori o maggiori di 2 , troviamo che, tra quelli i cui quadrati *non* sono minori di 2 , tutti hanno i loro quadrati maggiori di 2. Non c'è un massimo per i rapporti il cui quadrato è minore di 2 , e nessun minimo per quelli il cui quadrato è maggiore di 2. Non c'è un limite inferiore a zero per la differenza tra i numeri il cui quadrato è leggermente minore di 2 e i numeri il cui quadrato è leggermente maggiore di 2. Possiamo, in breve, dividere *tutti* i rapporti in due classi in modo tale che tutti i termini in una classe siano minori di tutti nell'altra, non c'è un massimo per una classe e non c'è un minimo per l'altra. Tra queste due classi, dove dovrebbe esserci $\sqrt{2}$, non c'è nulla. Così il nostro cordone, sebbene lo abbiamo tracciato il più stretto possibile, è stato tracciato

nel posto sbagliato e non ha preso $\sqrt{2}$.

Il metodo sopra descritto di dividere tutti i termini di una serie in due classi, di cui una precede interamente l'altra, è stato reso celebre da Dedekind, [17] ed è quindi chiamato “taglio di Dedekind”. Per quanto riguarda ciò che accade nel punto di sezione, ci sono quattro possibilità: (1) può esserci un massimo nella sezione inferiore e un minimo nella sezione superiore, (2)

può esserci un massimo nella prima e nessun minimo nella seconda, (3) può non esserci un massimo nella prima, ma un minimo nella seconda, (4) può non esserci né un massimo nella prima né un minimo nella seconda. Di questi quattro casi, il primo è illustrato da qualsiasi serie in cui ci sono termini consecutivi: nella serie degli interi, ad esempio, una sezione inferiore deve terminare con un certo numero n e la sezione superiore deve quindi iniziare con $n + 1$. Il secondo caso sarà illustrato nella serie di rapporti se prendiamo come sezione inferiore tutti i rapporti fino a 1 incluso , e come sezione superiore tutti i rapporti maggiori di 1. Il terzo caso è illustrato se prendiamo come sezione inferiore tutti i rapporti minori di 1 , e come sezione superiore tutti i rapporti da 1 in su (incluso 1 stesso). Il quarto caso, come abbiamo visto, è illustrato se mettiamo nella sezione inferiore tutti i rapporti il cui quadrato è minore di 2 , e nella sezione superiore tutti i rapporti il cui quadrato è maggiore di 2 .

Possiamo trascurare il primo dei nostri quattro casi, poiché si presenta solo in serie dove ci sono consecutivi

1892

termini. Nel secondo dei nostri quattro casi, diciamo che il massimo della sezione inferiore è il *limite inferiore* della sezione superiore, o di qualsiasi insieme di termini scelti dalla sezione superiore in modo tale che nessun termine della sezione superiore sia precedente a tutti loro. Nel terzo dei nostri quattro

casi, diciamo che il minimo della sezione superiore è il limite superiore della sezione inferiore, o di qualsiasi insieme di termini scelti dalla sezione inferiore in modo tale che nessun termine della sezione inferiore sia successivo a tutti loro. Nel quarto caso, diciamo che c'è un "intervallo": né la sezione superiore né quella inferiore hanno un limite o un ultimo termine. In questo caso, possiamo anche dire che abbiamo una "sezione irrazionale", poiché le sezioni della serie di rapporti hanno degli "interruzioni" quando corrispondono a numeri irrazionali.

Ciò che ha ritardato la vera teoria degli irrazionali è stata la convinzione errata che debbano esistere dei "limiti" per le serie di rapporti. Il concetto di "limite" è di fondamentale importanza e, prima di procedere oltre, è opportuno definirlo.

Si dice che un termine *x* è un “limite superiore” di una classe *α* rispetto a una relazione P se (1) *α* non ha un massimo in P, (2) ogni elemento di *α* che appartiene al campo di P precede *x* , (3) ogni elemento del campo di P che precede *x* precede qualche elemento di *α* . (Per “precede” intendiamo “ha la relazione P con”.) Ciò presuppone la seguente definizione di “massimo”:

Un termine *x* si dice “massimo” di una classe *α* rispetto a una relazione P se *x* è un membro di *α* e del campo di P e non ha la relazione P con nessun altro membro di *α* .

Queste definizioni non richiedono che i termini a cui vengono applicate siano quantitativi. Ad esempio, data una serie di istanti di tempo ordinati in "prima" e "dopo", il loro "massimo" (se esiste)

sarà l'ultimo degli istanti; ma se sono ordinati in "dopo" e "prima", il loro "massimo" (se esiste) sarà il primo degli istanti.

Il “minimo” di una classe rispetto a P è il suo massimo rispetto all’inverso di P; e il “limite inferiore” rispetto a P è il limite superiore rispetto all’inverso di P.

I concetti di limite e massimo non richiedono necessariamente che la relazione rispetto alla quale sono definiti sia seriale, ma hanno poche applicazioni importanti, tranne nei casi in cui la relazione è seriale o quasi-seriale. Un concetto spesso importante è quello di "limite superiore o massimo", a cui possiamo dare il nome di "limite superiore". Pertanto, il "limite superiore" di un insieme di termini scelti da una serie è il loro ultimo elemento, se ne hanno uno, altrimenti è il primo termine dopo tutti gli altri, se esiste un tale termine. Se non c'è né un massimo né un limite, non c'è un limite superiore . Il "limite inferiore" è il limite inferiore o minimo.

Tornando ai quattro tipi di sezione di Dedekind, vediamo che nei primi tre casi ogni sezione ha un confine (superiore o inferiore, a seconda dei casi), mentre nel quarto caso nessuno dei due ha un confine. È anche chiaro che, ogniqualvolta la sezione inferiore ha un confine superiore, anche la sezione superiore ha un confine inferiore. Nel secondo e nel terzo caso, i due confini sono identici; nel primo, sono termini consecutivi della serie.

Una serie si dice “Dedekindiana” quando ogni sezione ha un limite, superiore o inferiore a seconda dei casi.

Abbiamo visto che la serie di rapporti in ordine di grandezza non è dedekindiana.

Per abitudine, influenzati dall'immaginazione spaziale, gli esseri umani hanno supposto che le serie *debbano* avere dei limiti anche nei casi in cui il contrario appare strano. Così, percependo l'assenza di un limite *razionale* per i rapporti il cui quadrato è minore di 2 , si sono permessi di "postulare" un limite *irrazionale* , che serviva a colmare il vuoto di Dedekind. Dedekind, nell'opera sopra citata, ha stabilito l'assioma secondo cui tale vuoto deve essere sempre colmato, *ovvero* ogni sezione deve avere un limite. È per questo motivo che le serie per le quali il suo assioma è verificato sono dette "dedekindiane". Tuttavia, esiste un numero infinito di serie per le quali non è verificato.

Il metodo di "postulare" ciò che vogliamo ha molti vantaggi; sono gli stessi vantaggi del furto rispetto al lavoro onesto. Lasciamoli agli altri e proseguiamo con il nostro lavoro onesto.

È chiaro che un taglio di Dedekind irrazionale in qualche modo “rappresenta” un irrazionale. Per poter utilizzare questo, che all'inizio non è altro che una vaga sensazione, dobbiamo trovare un modo per ricavarne una definizione precisa; e per fare ciò, dobbiamo liberarci dall'idea che un irrazionale debba essere il limite di un insieme di rapporti. Così come i rapporti il cui denominatore è 1 non sono identici agli interi, allo stesso modo quei numeri razionali | che 72 possono essere maggiori o minori degli irrazionali, o possono avere irrazionali come limiti, non devono essere identificati con i rapporti. Dobbiamo definire un

nuovo tipo di numeri chiamati “numeri reali”, di cui alcuni saranno razionali e altri irrazionali. Quelli che sono razionali “corrispondono” ai rapporti, nello stesso modo in cui il rapporto *n/* 1 corrisponde all'intero

n ; ma non sono la stessa cosa dei rapporti. Per decidere cosa debbano essere, osserviamo che un numero irrazionale è rappresentato da un taglio irrazionale, e un taglio è rappresentato dalla sua sezione inferiore. Limitiamoci ai tagli in cui la sezione inferiore non ha un massimo; in questo caso chiameremo la sezione inferiore "segmento". Quindi i segmenti che corrispondono ai rapporti sono quelli costituiti da tutti i rapporti minori del rapporto a cui corrispondono, che è il loro confine; mentre quelli che rappresentano i numeri irrazionali sono quelli che non hanno confine. I segmenti, sia quelli che hanno confini sia quelli che non li hanno, sono tali che, di due qualsiasi appartenenti a una serie, uno deve essere parte dell'altro; quindi possono essere tutti disposti in una serie mediante la relazione di intero e parte. Una serie in cui ci sono lacune di Dedekind, *cioè* in cui ci sono segmenti che non hanno confine, darà origine a più segmenti di quanti siano i suoi termini, poiché ogni termine definirà un segmento avente quel termine come confine, e quindi i segmenti senza confini saranno in più.

Siamo ora in grado di definire un numero reale e un numero irrazionale.

Un “numero reale” è un segmento della serie di rapporti in ordine di grandezza.

Un “numero irrazionale” è un segmento della serie

di rapporti che non hanno limiti.

Un “numero reale razionale” è un segmento della serie dei rapporti che ha un limite.

Pertanto, un numero reale razionale è costituito da tutti i rapporti minori di un certo rapporto, ed è il numero reale razionale corrispondente a tale rapporto. Il numero reale 1 , ad esempio, è la classe delle frazioni proprie .

Nei casi in cui supponiamo naturalmente che $\sqrt{3}$ un numero irrazionale debba essere il limite di un insieme di rapporti, la verità è che esso è il limite del corrispondente insieme di numeri reali razionali nella serie di segmenti ordinati per intero e parte. Ad esempio, $\sqrt{2}$ è il limite superiore di tutti quei segmenti della serie di rapporti che corrispondono a rapporti il cui quadrato è minore di $\sqrt{2}$. Più semplicemente, $\sqrt{2}$ è il segmento *costituito* da tutti quei rapporti il cui quadrato è minore di $\sqrt{2}$.

È facile dimostrare che la serie di segmenti di qualsiasi serie è dedekindiana. Infatti, dato un qualsiasi insieme di segmenti, il loro confine sarà la loro somma logica, *cioè* la classe di tutti quei termini che appartengono ad almeno un segmento dell'insieme. [18]

La definizione di numeri reali sopra riportata è un esempio di "costruzione" in contrapposizione alla "postulazione", di cui abbiamo avuto un altro esempio nella definizione di numeri

cardinali. Il grande vantaggio di questo metodo è che non richiede nuove ipotesi, ma ci permette di procedere deduttivamente a partire dall'apparato logico originario.

Non vi è alcuna difficoltà nel definire l'addizione e la moltiplicazione per i numeri reali come sopra definito. Dati due numeri reali μ e ν , ciascuno dei quali rappresenta una classe di rapporti, si prenda un qualsiasi elemento di μ e un qualsiasi elemento di ν e li si sommi secondo la regola per la somma dei rapporti. Si formi la classe di tutte le somme ottenibili variando gli elementi scelti di μ e ν . Questo fornisce una nuova classe di rapporti, ed è facile dimostrare che questa nuova classe è un segmento della serie dei rapporti. La definiamo come la somma di μ e ν . Possiamo enunciare la definizione in modo più conciso come segue:

La *somma aritmetica di due numeri reali* è la classe delle somme aritmetiche di un elemento dell'uno e di un elemento dell'altro, scelti in tutti i modi possibili .

Possiamo definire il prodotto aritmetico di due numeri reali ⍰⍰ esattamente nello stesso modo, moltiplicando un membro dell'uno per un membro dell'altro in

tutti i modi possibili. La classe di rapporti così generata è definita come il prodotto dei due numeri reali. (In tutte queste definizioni, la serie di rapporti deve essere definita escludendo 0 e infinito.)

Non vi è alcuna difficoltà nell'estendere le nostre definizioni ai numeri reali positivi e negativi, nonché alla loro addizione e moltiplicazione.

Resta da dare la definizione di numeri complessi.

I numeri complessi, pur essendo suscettibili di un'interpretazione geometrica, non sono richiesti dalla geometria nello stesso modo imperativo in cui lo sono i numeri irrazionali. Un numero "complesso" è un numero che coinvolge la radice quadrata di un numero negativo, sia esso intero, frazionario o reale. Poiché il quadrato di un numero negativo è positivo, un numero il cui quadrato deve essere negativo deve essere un nuovo tipo di numero. Usando la lettera *i* per la radice quadrata di -1 , qualsiasi numero che coinvolga la radice quadrata di un numero negativo può essere espresso nella forma $x + yi$, dove x e y sono reali. La parte yi è chiamata parte "immaginaria" di questo numero, mentre x è la parte "reale". (Il motivo per cui si usa l'espressione "numeri reali" è per il contrasto con quelli "immaginari"). I numeri complessi sono stati a lungo usati abitualmente dai matematici, nonostante l'assenza di una definizione precisa. Si è semplicemente ipotizzato che obbedissero alle usuali regole aritmetiche, e su questa base il loro impiego si è rivelato vantaggioso. Sono meno necessari per la geometria che per l'algebra e l'analisi. Desideriamo, ad esempio, poter affermare che ogni equazione di secondo grado ha due radici, ogni equazione di terzo grado ne ha tre, e così via. Ma se ci limitiamo ai numeri reali, un'equazione come $x^2 + 1 = 0$ non ha radici, e

un'equazione come $x^3 - 1 = 0$ ne ha solo una. Ogni generalizzazione del concetto di numero si è presentata inizialmente come necessaria per risolvere qualche semplice problema: i numeri negativi erano necessari affinché la sottrazione fosse sempre possibile, poiché altrimenti $a - b$ non avrebbe senso se a fosse minore di b ; le frazioni erano necessarie affinché la divisione fosse sempre possibile; e i numeri complessi sono necessari affinché l'estrazione delle radici e la risoluzione delle equazioni siano sempre possibili. Ma le estensioni dei numeri non *nascono* dalla semplice necessità di crearle: nascono dalla definizione, ed è proprio alla definizione dei numeri complessi che ora dobbiamo rivolgere la nostra attenzione.

Un numero complesso può essere considerato e definito semplicemente come una coppia ordinata di numeri reali. Qui, come altrove, sono possibili molte definizioni. Tutto ciò che è necessario è che le definizioni adottate conducano a certe proprietà. Nel caso dei numeri complessi, se sono definiti come coppie ordinate di numeri reali, garantiamo subito alcune delle proprietà richieste, vale a dire che sono necessari due numeri reali per determinare un numero complesso, e che tra questi possiamo distinguere un primo e un secondo, e che due numeri complessi sono identici solo quando il primo numero reale coinvolto nell'uno è uguale al primo coinvolto nell'altro, e il secondo al secondo. Ciò che è ulteriormente necessario può essere garantito definendo le regole di addizione e moltiplicazione. Dobbiamo avere

$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i$

$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i.$

Definiremo quindi che, date due coppie ordinate di numeri reali, (*x,y*) e (*x* ' ,*y* '), la loro somma sarà la coppia (*x* + *x* ' , *y* + *y* '), e il loro prodotto sarà la coppia (*xx* ' - *yy* ' , *xy* ' + *x'y*) . Con queste definizioni garantiremo che le nostre coppie ordinate abbiano le proprietà desiderate. Ad esempio, prendiamo il prodotto delle due coppie (0 , *y*) e (0 ,*y* '). Questo, secondo la regola precedente, sarà la coppia (-yy *'* , 0). Quindi il quadrato della coppia (0 , 1) sarà la coppia (-1 *, 0*) . Ora *,* quelle coppie in cui il secondo termine è 0 sono quelle che, secondo la nomenclatura usuale, hanno la parte immaginaria zero; nella notazione *x* + *yi* , sono *x* + 0i , che è naturale scrivere semplicemente *x* . Così come è naturale (ma errato) identificare i rapporti il cui denominatore è l'unità con i numeri interi 76 , allo stesso modo è naturale (ma errato) identificare i numeri complessi la cui parte immaginaria è zero con i numeri reali. Sebbene questo sia un errore in teoria, è una comodità in pratica; " *x* + 0i *"* può essere sostituito semplicemente da " *x* " e " 0 + *yi* " da " *yi* ", a patto di ricordare che " *x* " non è in realtà un numero reale, ma un caso speciale di numero complesso. E quando *y* è 1 , " *yi* " può ovviamente essere sostituito da " *i* ". Pertanto la coppia (0 *,* 1) è rappresentata da *i* , e la coppia (-1 *,* 0) è rappresentata da -1 . Ora, le nostre regole di moltiplicazione fanno sì che il quadrato di (0 *,* 1) sia uguale a (-1 *,* 0), *ovvero* il quadrato di *i* è -1 . Questo è ciò che volevamo

ottenere. Quindi le nostre definizioni servono a tutti gli scopi necessari.

È facile dare un'interpretazione geometrica dei numeri complessi nella geometria del piano. Questo argomento è stato esposto in modo efficace da W.K. Clifford nel suo *"Common Sense of the Exact Sciences"* , un libro di grande pregio, ma scritto prima che si comprendesse l'importanza delle definizioni puramente logiche.

I numeri complessi di ordine superiore, sebbene molto meno utili e importanti di quelli che abbiamo definito, hanno certi usi che non sono privi di importanza in geometria, come si può vedere, ad esempio, nell'Algebra *Universale* del Dr. Whitehead . La definizione di numeri complessi di ordine *n* si ottiene mediante un'ovvia estensione della definizione che abbiamo dato. Definiamo un numero complesso di ordine *n* come una relazione uno-a-molti il cui dominio è costituito da certi numeri reali e il cui dominio inverso è costituito dagli interi da 1 a *n* . [19] Questo è ciò che verrebbe normalmente indicato dalla notazione (*x1 , x2 , x3 , ... xn*) , dove i suffissi denotano la correlazione con gli interi usati come suffissi , e la correlazione è uno-a - molti, non necessariamente uno-a-uno, perché *xr e* xs *possono* essere uguali quando *r e s* non sono uguali. La definizione di cui sopra, con un'opportuna regola di moltiplicazione, sarà sufficiente per tutti gli scopi per i quali sono necessari numeri complessi di ordine superiore.

Abbiamo ora completato la nostra rassegna delle estensioni del concetto di numero che non coinvolgono l'infinito. L'applicazione

del concetto di numero agli insiemi infiniti sarà il nostro prossimo argomento.

Capitolo VIII Numeri cardinali infiniti

La definizione di numeri cardinali che abbiamo dato nel Capitolo II è stata applicata nel Capitolo III ai numeri finiti, *ovvero* ai numeri naturali ordinari. A questi abbiamo dato il nome di "numeri induttivi", perché abbiamo scoperto che si definiscono come numeri che obbediscono all'induzione matematica a partire da 0. Tuttavia, non abbiamo ancora considerato le collezioni che non hanno un numero induttivo di termini, né ci siamo chiesti se tali collezioni possano essere considerate numeri. Questo è un problema antico, che è stato risolto ai nostri giorni, principalmente da Georg Cantor. Nel presente capitolo cercheremo di spiegare la teoria dei numeri cardinali transfiniti o infiniti, così come risulta dalla combinazione delle sue scoperte con quelle di Frege sulla teoria logica dei numeri.

Non si può affermare con *certezza* che esistano effettivamente collezioni infinite al mondo. L'ipotesi che esistano è ciò che chiamiamo "assioma dell'infinito". Sebbene si suggeriscano diversi modi per sperare di dimostrare questo assioma, c'è motivo di temere che siano tutti fallaci e che non vi sia alcuna ragione logica conclusiva per crederlo vero. Allo stesso tempo, non esiste certamente alcuna ragione logica *contro* le collezioni infinite, e siamo quindi giustificati, in logica, a indagare l'ipotesi che tali collezioni esistano. La forma pratica di questa ipotesi, per i nostri scopi attuali, è l'assunzione che, se n è un qualsiasi numero induttivo, n non è uguale a $n + 1$. Diverse sottigliezze emergono nell'identificare questa forma della nostra assunzione con la

forma che afferma l'esistenza di collezioni infinite; ma le tralasceremo fino a quando, in un capitolo successivo, prenderemo in considerazione l'assioma dell'infinito in sé. Per il momento ci limiteremo a supporre che, se *n* è un numero induttivo, *n* non sia uguale a *n* + 1. Questo è implicato nell'assunto di Peano secondo cui nessun numero induttivo ha lo stesso successore di un altro; infatti, se *n* = *n* + 1 , allora *n* − 1 e *n* hanno lo stesso successore, cioè *n* . Pertanto, non stiamo assumendo nulla che non fosse già implicato nelle proposizioni primitive di Peano.

Consideriamo ora l'insieme dei numeri induttivi stessi. Questa è una classe perfettamente ben definita. In primo luogo, un numero cardinale è un insieme di classi che sono tutte simili tra loro e non sono simili a nient'altro che tra loro. Definiamo quindi come "numeri induttivi" quei numeri cardinali che appartengono alla posterità di n rispetto alla relazione di *n* con *n* + 1 , *ovvero* quelli che possiedono ogni proprietà posseduta da n e dai successori dei possessori, intendendo per "successore" di *n* il numero *n* + 1. Pertanto, la classe dei "numeri induttivi" è perfettamente definita. Per definizione generale di numeri cardinali, il numero di termini nella classe dei numeri induttivi deve essere definito come "tutte quelle classi che sono simili alla classe dei numeri induttivi", *ovvero* questo insieme di classi è il numero dei numeri induttivi secondo le nostre definizioni.

Ora è facile vedere che questo numero non è uno dei numeri induttivi. Se *n* è un qualsiasi numero induttivo, il numero di numeri

da 0 a *n* (inclusi entrambi) è *n* + 1 ; quindi il numero totale di numeri induttivi è maggiore di *n* , indipendentemente da quale numero induttivo sia *n* . Se disponiamo i numeri induttivi in una serie in ordine di grandezza, questa serie non ha un ultimo termine; ma se *n* è un numero induttivo, ogni serie il cui campo ha *n* termini ha un ultimo termine, come è facile dimostrare. Tali differenze potrebbero essere moltiplicate *a piacere* . Quindi il numero di numeri induttivi è un nuovo numero, diverso da tutti gli altri, che non possiede tutte le proprietà induttive. Può accadere che 0 abbia una certa proprietà , e che se *n* ce l'ha, ce l'abbia anche *n* + 1 , eppure che 79 questo nuovo numero non la possieda. Le difficoltà che per tanto tempo hanno ritardato la teoria dei numeri infiniti erano in gran parte dovute al fatto che alcune, almeno, delle proprietà induttive venivano erroneamente considerate come *appartenenti* a tutti i numeri; si pensava addirittura che non potessero essere negate senza contraddizione. Il primo passo per comprendere i numeri infiniti consiste nel rendersi conto dell'erroneità di questa visione.

La differenza più notevole e sorprendente tra un numero induttivo e questo nuovo numero è che quest'ultimo rimane invariato aggiungendo 1 , sottraendo 1 , raddoppiando, dimezzando o eseguendo qualsiasi altra operazione che consideriamo necessariamente in grado di aumentare o diminuire un numero. Il fatto di non essere alterato dall'aggiunta di 1 viene utilizzato da Cantor per definire quelli che chiama numeri cardinali "transfiniti"; tuttavia, per diverse ragioni, alcune delle quali diventeranno chiare in seguito, è preferibile definire un numero

cardinale infinito come un numero che non possiede tutte le proprietà induttive, *ovvero* semplicemente come un numero che non è induttivo. Ciononostante, la proprietà di non essere alterata dall'aggiunta di 1 è molto importante e merita di essere approfondita.

Affermare che una classe ha un numero che non viene alterato dall'aggiunta di 1 equivale ad affermare che, se prendiamo un termine *x* che non appartiene alla classe, possiamo trovare una relazione biunivoca il cui dominio è la classe e il cui dominio inverso si ottiene aggiungendo *x* alla classe. Infatti, in tal caso, la classe è simile alla somma di se stessa e del termine *x* , *cioè* a una classe con un termine in più; in modo che abbia lo stesso numero di una classe con un termine in più, cosicché se *n* è questo numero, $n = n + 1$. In questo caso, avremo anche $n = n - 1$, *cioè* ci saranno relazioni biunivoche i cui domini sono costituiti dall'intera classe e i cui domini inversi sono costituiti da un solo termine in meno rispetto all'intera classe. Si può dimostrare che i casi in cui ciò accade sono gli stessi dei casi apparentemente più generali in cui *una* parte (inferiore al tutto) può essere messa in relazione biunivoca con il tutto. Quando ciò è possibile, | si può dire che il correlatore mediante il quale ciò avviene è ⍰⍰

“riflettono” l’intera classe in una parte di se stessa; per questo motivo, tali classi saranno chiamate “riflessive”. Quindi:

Una classe “riflessiva” è una classe che è simile a una parte propria di se stessa. (Una “parte propria” è una parte che manca al tutto.)

Un numero cardinale “riflessivo” è il numero cardinale di una classe riflessiva.

Dobbiamo ora prendere in considerazione questa proprietà della riflessività.

Uno degli esempi più eclatanti di "riflessione" è l'illustrazione della mappa di Royce: egli immagina che essa abbia deciso di tracciare una mappa dell'Inghilterra su una porzione della sua superficie. Una mappa, se è accurata, ha una perfetta corrispondenza biunivoca con l'originale; quindi la nostra mappa, che è una parte, è in relazione biunivoca con il tutto e deve contenere lo stesso numero di punti del tutto, che deve quindi essere un numero riflessivo. A Royce interessa il fatto che la mappa, se è corretta, deve contenere una mappa della mappa, che a sua volta deve contenere una mappa della mappa della mappa, e così via *all'infinito* . Questo punto è interessante, ma non è necessario che ci occupi in questo momento. Infatti, faremo bene a passare da illustrazioni pittoresche a quelle più precise, e a questo scopo non possiamo fare di meglio che considerare la serie numerica stessa.

La relazione tra *n* e *n* + 1 , limitata ai numeri induttivi, è iniettiva, ha come dominio tutti i numeri induttivi e come dominio inverso tutti i numeri induttivi tranne 0. Pertanto, l'intera classe dei numeri induttivi è simile a ciò che la stessa classe diventa quando omettiamo 0. Di conseguenza *,* è una classe "riflessiva" secondo la definizione, e il numero dei suoi termini è un numero "riflessivo". Allo stesso modo, la relazione tra *n* e 2n , limitata ai

numeri induttivi, è iniettiva, ha come dominio tutti i numeri induttivi e come dominio inverso i soli numeri induttivi pari. Quindi il numero totale di numeri induttivi è uguale al numero di numeri induttivi pari. Questa proprietà fu usata da Leibniz (e da molti altri) come prova dell'impossibilità dei numeri infiniti; si pensava fosse contraddittorio che " la parte debba essere uguale al 21 intero". Ma questa è una di quelle frasi la cui plausibilità dipende da una vaghezza non percepita: la parola “uguale” ha molti significati, ma se la si intende come ciò che abbiamo chiamato “simile”, non c’è contraddizione, poiché una collezione infinita può benissimo avere parti simili a sé stessa. Coloro che considerano ciò impossibile hanno, inconsciamente di norma, attribuito ai numeri in generale proprietà che possono essere dimostrate solo per induzione matematica, e che solo la loro familiarità rende

noi consideriamo, erroneamente, vero al di là della regione del finito.

Ogni volta che possiamo “riflettere” una classe in una parte di se stessa, la stessa relazione rifletterà necessariamente quella parte in una parte più piccola, e così via *all'infinito* . Ad esempio, possiamo riflettere, come abbiamo appena visto, tutti i numeri induttivi nei numeri pari; possiamo, mediante la stessa relazione (quella da *n* a 2n *)* , riflettere i numeri pari nei multipli di 4 , questi nei multipli di 8 , e così via. Questo è un analogo astratto del problema della mappa di Royce. I numeri pari sono una “mappa” di tutti i numeri induttivi; i multipli di 4 sono una mappa della mappa; i multipli di 8 sono una mappa della mappa della mappa;

e così via. Se avessimo applicato lo stesso processo alla relazione da *n* a *n* + 1 , la nostra “mappa” sarebbe stata costituita da tutti i numeri induttivi tranne 0 ; La mappa della mappa sarebbe stata composta da tutto ciò che va da 2 in poi, la mappa della mappa della mappa da tutto ciò che va da 3 in poi; e così via. L'uso principale di tali illustrazioni è quello di familiarizzare con l'idea di classi riflessive, in modo che proposizioni aritmetiche apparentemente paradossali possano essere facilmente tradotte nel linguaggio delle riflessioni e delle classi, in cui l'aria di paradosso è molto minore.

Sarà utile dare una definizione del numero-

che è quello dei cardinali induttivi. A questo scopo definiremo innanzitutto il tipo di serie esemplificato dai cardinali induttivi in ordine di grandezza. Il tipo di serie che viene chiamata “progressione” è già stato considerato nel Capitolo I. È una serie che può essere generata da una relazione di consecutività: | ogni membro della serie 22 deve avere un successore, ma ce ne deve essere solo uno che non ha predecessore, e ogni membro della serie deve essere nella posterità di questo termine rispetto alla relazione “predecessore immediato”. Queste caratteristiche possono essere riassunte nella seguente definizione:— [20]

Una “progressione” è una relazione biunivoca tale che esiste un solo termine appartenente al dominio ma non al dominio inverso, e il dominio è identico alla discendenza di questo singolo termine.

È facile vedere che una progressione, così definita, soddisfa i cinque assiomi di Peano. Il termine appartenente al dominio ma non al dominio inverso sarà ciò che egli chiama " ∞ "; il termine con cui un termine ha la relazione biunivoca sarà il "successore" del termine; e il dominio della relazione biunivoca sarà ciò che egli chiama "numero". Prendendo i suoi cinque assiomi uno alla volta, abbiamo le seguenti traduzioni:

(1) " 0 è un numero" diventa: "L'elemento del dominio che non è un elemento del dominio inverso è un elemento del dominio". Questo equivale all'esistenza di un tale elemento, che è data nella nostra definizione. Chiameremo questo elemento "il primo termine".

(2) "Il successore di qualsiasi numero è un numero" diventa: "Il termine con cui un dato membro del dominio ha la relazione in questione è ancora un membro del dominio". Ciò si dimostra come segue: Per definizione, ogni membro del dominio è un membro della posterità del primo termine; quindi il successore di un membro del dominio deve essere un membro della posterità del primo termine (perché la posterità di un termine contiene sempre i propri successori, per definizione generale di posterità), e quindi un membro del dominio, perché per definizione la posterità del primo termine è la stessa del dominio.

(3) "Nessun numero ha lo stesso successore di un altro." Questo significa semplicemente che la relazione è uno-molti, come è per definizione (essendo uno-uno). |

(2) “ 0 non è il successore di alcun numero” diventa : “Il primo termine non è un membro del dominio inverso”, che è ancora una volta un risultato immediato della definizione.

(5) Questa è induzione matematica e diventa: "Ogni membro del dominio appartiene alla posterità del primo termine", che faceva parte della nostra definizione.

Pertanto, le progressioni, così come le abbiamo definite, possiedono le cinque proprietà formali da cui Peano deduce l'aritmetica. È facile dimostrare che due progressioni sono "simili" nel senso definito per la similarità delle relazioni nel Capitolo VI. Possiamo, naturalmente, derivare una relazione seriale dalla relazione biunivoca con cui definiamo una progressione: il metodo utilizzato è quello spiegato nel Capitolo IV, e la relazione è quella di un termine a un membro della sua propria posterità rispetto alla relazione biunivoca originale.

Due relazioni transitive asimmetriche che generano progressioni sono simili, per le stesse ragioni per cui sono simili le corrispondenti relazioni biunivoche. La classe di tutti questi generatori transitivi di progressioni è un “numero seriale” nel senso del Capitolo VI; è infatti il più piccolo dei numeri seriali infiniti, il numero a cui Cantor ha dato il nome ω , con il quale lo ha reso famoso.

Per il momento, però, ci occupiamo dei numeri *cardinali* . Poiché due progressioni sono relazioni di similarità, ne consegue che i loro domini (o i loro campi, che coincidono con i loro domini) sono

classi di similarità. I domini delle progressioni formano un numero cardinale, poiché si può facilmente dimostrare che ogni classe simile al dominio di una progressione è a sua volta il dominio di una progressione. Questo numero cardinale è il più piccolo dei numeri cardinali infiniti; è quello a cui Cantor ha attribuito l'Aleph ebraico con il suffisso $\aleph$, per distinguerlo dai cardinali infiniti più grandi, che hanno altri suffissi . Pertanto , il nome del più piccolo dei cardinali infiniti è $\aleph$.

Affermare che una classe ha $\aleph_0$ termini equivale ad affermare che essa appartiene a $\aleph_0$, e questo equivale ad affermare che i membri della classe $\aleph_4$ possono essere disposti in una progressione. È ovvio che qualsiasi progressione rimane tale se ne omettiamo un numero finito di termini, o un termine sì e uno no , o tutti tranne un termine ogni dieci o ogni centesimo. Questi metodi di "diradamento" di una progressione non la fanno cessare di essere tale, e quindi non diminuiscono il numero dei suoi termini, che rimane $\aleph_0$. In effetti, qualsiasi selezione da una progressione è una progressione se non ha un ultimo termine, per quanto sparsamente possa essere distribuito. Prendiamo (ad esempio) i numeri induttivi della forma n_1 , n_2 , o n_3 , n_4 , n_5 . Tali numeri diventano molto rari nelle parti superiori della serie numerica, eppure ce ne sono tanti quanti sono i numeri induttivi in generale, ovvero $\aleph_0$.

Viceversa, possiamo aggiungere termini ai numeri induttivi senza aumentarne il numero. Prendiamo, ad esempio, i rapporti. Si potrebbe essere portati a pensare che debbano esserci molti più

rapporti che numeri interi, poiché i rapporti il cui denominatore è 1 corrispondono ai numeri interi e sembrano essere solo una proporzione infinitesimale di rapporti. Ma in realtà il numero di rapporti (o frazioni) è esattamente lo stesso del numero di numeri induttivi, ovvero ℵ 0. Questo si può facilmente verificare disponendo i rapporti in una serie secondo il seguente schema: se la somma del numeratore e del denominatore in un rapporto è minore di quella nell'altro, si mette il primo prima del secondo; se la somma è uguale nei due, si mette prima quello con il numeratore minore. Questo ci dà la serie

1 , 1/2 , 2 , 1/3 , 1 , 1/4 , 2/3 , 3/2 , 4 , 1/5 , ...

Questa serie è una progressione e tutti i rapporti compaiono in essa prima o poi. Pertanto possiamo disporre tutti i rapporti in una progressione, e il loro numero è quindi ℵ 0 .

Non è però vero che *tutte* le collezioni infinite abbiano $\aleph_0$ termini . Il numero di numeri reali, $\aleph_0$ ad esempio, è maggiore di $\aleph_0$; è infatti $\aleph_0$, e non è difficile dimostrare che $\aleph_0$ è maggiore di ^{n} anche quando *n* è infinito. Il modo più semplice per dimostrarlo è provare, in primo luogo, che se una classe ha *n membri ,* contiene $\aleph_0$ ^{sottoclassi} , in altre parole, che ci sono $\aleph_0$ modi per selezionarne alcuni membri (inclusi i ^{casi} estremi in cui selezioniamo tutti o nessuno); e in secondo luogo, che il numero di sottoclassi contenute in una classe è sempre maggiore del numero di membri della classe. Di queste due proposizioni, la prima è nota nel caso dei numeri finiti e non è difficile estenderla ai numeri infiniti. La dimostrazione della seconda è così semplice e istruttiva che la forniremo:

In primo luogo, è chiaro che il numero di sottoclassi di una data classe (diciamo α) è almeno pari al numero di membri, poiché ogni membro costituisce una sottoclasse, e quindi abbiamo una correlazione di tutti i membri con alcune delle sottoclassi. Ne consegue che, se il numero di sottoclassi non è *uguale* al numero di membri, deve essere *maggiore* . Ora è facile dimostrare che il numero non è uguale, mostrando che, data una qualsiasi relazione uno a uno il cui dominio sono i membri e il cui dominio inverso è contenuto nell'insieme delle sottoclassi, deve esserci almeno una sottoclasse che non appartiene al dominio inverso. La dimostrazione è la seguente: [21] Quando viene stabilita una correlazione uno a uno R tra tutti i membri di α e alcune delle sottoclassi, può accadere che un dato membro x sia correlato con una sottoclasse di cui è membro; oppure, ancora, può accadere che x sia correlato con una sottoclasse di cui non è membro. Consideriamo l'intera classe, β , di quei membri x che sono correlati con sottoclassi di cui non sono membri. Questa è una sottoclasse di α , e non è correlata con alcun membro di α . Infatti, prendendo prima i membri di β , ciascuno di essi è (per definizione di β) correlato con qualche sottoclasse di cui non è membro, e quindi non è correlato con β . Prendendo poi i termini che non sono membri di β , ciascuno di essi (per definizione di β) è correlato con qualche sottoclasse di cui è membro, e quindi di nuovo non è correlato con β . Pertanto nessun membro di α è correlato con β . Poiché R era *una qualsiasi* correlazione uno a uno di tutti i membri con alcune 86 sottoclassi, ne consegue che non c'è correlazione di tutti i membri con *tutte* le sottoclassi. Non

importa ai fini della dimostrazione se β non ha membri: tutto ciò che accade in tal caso è che la sottoclasse che viene mostrata come omessa è la classe nulla. Quindi in ogni caso il numero di sottoclassi non è uguale al numero di membri e quindi, per quanto detto in precedenza,

(1892), p. 77 .

è maggiore. Combinando questo con la proposizione che, se n è il numero di membri, 2^n è il numero di sottoclassi, abbiamo il teorema che 2^n è sempre maggiore di n , anche quando n è infinito.

Da questa proposizione segue che non esiste un massimo per gli infiniti numeri cardinali. Per quanto grande possa essere un numero infinito n , 2^n sarà sempre maggiore. L'aritmetica degli infiniti numeri è alquanto sorprendente finché non ci si abitua. Abbiamo, ad esempio,

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 + n = \aleph_0$, dove n è qualsiasi

numero induttivo,

2

$\aleph_0 = \aleph_0$.

(Questo deriva dal caso dei rapporti, poiché, dato che un rapporto è determinato da una coppia di numeri induttivi, è facile vedere

che il numero di rapporti è il quadrato del numero di numeri induttivi, *cioè* è

2

ℵ 0 ; ma abbiamo visto che è anche ℵ 0 .)

ℵ 0 ^{n} = ℵ 0 *,* dove *n* è un qualsiasi numero induttivo.

(Questo segue da ℵ 02 = ℵ 0 per induzione; infatti se ℵ 0 ^{n} = ℵ 0 *,*

allora ℵ □ $^{n+1}$ = ℵ □ $^{□}$ = ℵ □ .)

Ma $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

In effetti, come vedremo in seguito, $\aleph_0$ è un numero molto importante, ovvero il numero di termini di una serie che possiede "continuità " nel senso in cui questo termine è usato da Cantor. Supponendo che spazio e tempo siano continui in questo senso (come comunemente si fa in geometria analitica e cinematica), questo sarà il numero di punti nello spazio o di istanti nel tempo; sarà anche il numero di punti in qualsiasi porzione finita di spazio, sia essa una linea, un'area o un volume. 27 Dopo $\aleph_0$, $\aleph_0$ è il più importante e interessante dei numeri cardinali infiniti.

Sebbene l'addizione e la moltiplicazione siano sempre possibili con cardinali infiniti, la sottrazione e la divisione non danno più risultati definiti e non possono quindi essere utilizzate come nell'aritmetica elementare. Prendiamo la sottrazione per prima: finché il numero sottratto è finito, tutto va bene; se l'altro numero è riflessivo, rimane invariato. Quindi $\aleph_0 - n = \aleph_0$, se n è *finito; fin*

qui, la sottrazione dà un risultato perfettamente definito. Ma è diverso quando sottraiamo $\aleph_0$ da se stesso; possiamo allora ottenere qualsiasi risultato, da 0 a $\aleph_0$. Questo è facilmente dimostrabile con degli esempi. Dai numeri induttivi, sottraiamo le seguenti serie di termini $\aleph_0$:

(1) Tutti i numeri induttivi: resto zero.

(2) Tutti i numeri induttivi da *n* in poi— resto, i numeri da 0 a $n-1$, numerando *n* termini in tutto.

(3) Tutti i numeri dispari—resto, tutti i numeri pari, numerazione di $\aleph$ 0 termini.

Questi sono tutti modi diversi di sottrarre $\aleph$ 0 da $\aleph$ 0 , e tutti danno risultati diversi .

Per quanto riguarda la divisione , risultati molto simili derivano dal fatto che $\aleph_0$ rimane invariato quando moltiplicato per 2 o 3 o per qualsiasi numero finito *n* o per $\aleph_0$. Ne consegue che $\aleph_0$ diviso per $\aleph_0$ può assumere qualsiasi valore da 1 a $\aleph_0$.

Dall'ambiguità della sottrazione e della divisione deriva che i numeri negativi e i rapporti non possono essere estesi ai numeri infiniti. L'addizione, la moltiplicazione e l'elevamento a potenza procedono in modo abbastanza soddisfacente, ma le operazioni inverse – sottrazione, divisione ed estrazione di radici – sono ambigue, e i concetti che dipendono da esse non sono validi quando si tratta di numeri infiniti.

La caratteristica con cui abbiamo definito la finitezza era l'induzione matematica, *ovvero* abbiamo definito un numero come finito quando obbedisce all'induzione matematica a partire da 0 , e una classe come finita quando il suo numero è finito. Questa definizione produce il tipo di risultato che una definizione dovrebbe produrre, vale a dire che i numeri finiti sono quelli che compaiono nelle normali serie numeriche 0 , 1 , 2 , 3 , ... Ma nel presente capitolo, i numeri infiniti di cui abbiamo discusso non sono stati semplicemente non induttivi: sono stati anche *riflessivi* . Cantor ha usato la riflessività come *definizione* dell'infinito e crede che sia equivalente alla non induttività; vale a dire, crede che ogni classe e ogni cardinale sia o induttivo o riflessivo. Questo può essere vero, e può molto probabilmente essere dimostrabile; Ma le dimostrazioni finora offerte da Cantor e altri (incluso il sottoscritto in passato) sono fallaci, per ragioni che saranno spiegate quando prenderemo in considerazione l'"assioma moltiplicativo". Al momento, non si sa se esistano classi e cardinali che non siano né riflessivi né induttivi. Se n fosse un tale cardinale, non avremmo $n = n + 1$, ma n non sarebbe uno dei "numeri naturali" e mancherebbe di alcune proprietà induttive. Tutte le classi e i cardinali infiniti *conosciuti* sono riflessivi; ma per ora è bene mantenere una mente aperta sulla possibilità che esistano casi, finora sconosciuti, di classi e cardinali che non siano né riflessivi né induttivi. Nel frattempo, adottiamo le seguenti definizioni:

Una classe *finita* o cardinale è una classe *induttiva* .

Una classe o un cardinale *infinito* è un insieme *non induttivo* . Tutte le classi e i cardinali *riflessivi* sono infiniti; tuttavia, al momento non è noto se tutte le classi e i cardinali infiniti siano riflessivi. Torneremo su questo argomento nel Capitolo XII.

Capitolo IX Serie infinite e ordinali

Una “serie infinita” può essere definita come una serie di 89 il cui campo è una classe infinita. Abbiamo già avuto modo di considerare un tipo di serie infinita, ovvero le progressioni. In questo capitolo tratteremo l'argomento in modo più generale.

La caratteristica più notevole di una serie infinita è che il suo numero seriale può essere modificato semplicemente riorganizzando i suoi termini. A questo proposito, esiste una certa opposizione tra numeri cardinali e numeri seriali. È possibile mantenere invariato il numero cardinale di una classe riflessiva pur aggiungendo termini; d'altra parte, è possibile modificare il numero seriale di una serie senza aggiungere o togliere termini, semplicemente riorganizzando i termini. Allo stesso tempo, nel caso di qualsiasi serie infinita è anche possibile, come per i numeri cardinali, aggiungere termini senza alterare il numero seriale: tutto dipende dal modo in cui vengono aggiunti.

Per chiarire la questione, è meglio iniziare con degli esempi. Consideriamo innanzitutto diversi tipi di serie che possono essere formate dai numeri induttivi disposti su vari piani.

Iniziamo con la serie

1 , 2 , 3 , 4 , ... *n*, ...,

che, come abbiamo già visto, rappresenta il più piccolo dei numeri seriali infiniti, del tipo che Cantor chiama ω . Procediamo a ridurre questa serie eseguendo ripetutamente l' operazione | di

rimozione di 90 alla fine del primo numero pari che compare. Otteniamo così in successione le varie serie:

1 , 3 , 4 , 5 , ... *n,* ... 2 ,

1 , 3 , 5 , 6 , ... *n* + 1 , ... 2 , 4 ,

1 , 3 , 5 , 7 , ... *n* + 2 , ... 2 , 4 , 6 ,

e così via. Se immaginiamo che questo processo continui il più a lungo possibile, arriviamo infine alla serie

1 , 3 , 5 , 7 , ... 2 *n* + 1 , ... 2 , 4 , 6 , 8 , ... 2 *n,* ...,

in cui abbiamo prima tutti i numeri dispari e poi tutti i numeri pari.

I numeri seriali di queste varie serie sono $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... 2 ω . Ciascuno di questi numeri è “maggiore” di ciascuno dei suoi predecessori, nel seguente senso:

Si dice che un numero di serie è "maggiore" di un altro se una qualsiasi serie avente il primo numero contiene un elemento avente il secondo numero, ma nessuna serie avente il secondo numero contiene un elemento avente il primo numero.

Se confrontiamo le due serie

1 , 2 , 3 , 4 , ... *n,* ... 1 , 3 , 4 , 5 , ... *n* + 1 , ... 2 ,

Osserviamo che la prima serie è simile alla parte della seconda che omette l'ultimo termine, ovvero il numero 2 , ma la seconda non è simile a nessuna parte della prima. (Questo è ovvio, ma è facilmente dimostrabile.) Pertanto, secondo la definizione, la

seconda serie ha un numero seriale maggiore della prima, *cioè* $\omega + 1$ è maggiore di ω . Ma se aggiungiamo un termine all'inizio di una progressione invece che alla fine, abbiamo comunque una progressione. Quindi $1 + \omega = \omega$. Pertanto $1 + \omega$ non è uguale a $\omega + 1$. Questa è una caratteristica dell'aritmetica relazionale in generale: se μ e ν sono due numeri relazionali, la regola generale è che $\mu + \nu$ non è uguale a $\nu + \mu$. Il caso degli ordinali finiti, in cui c'è uguaglianza, è piuttosto eccezionale.

La serie che abbiamo appena raggiunto era composta prima da tutti i numeri dispari e poi da tutti i numeri pari, e il suo numero seriale è 2ω . *Questo* numero 91 è maggiore di ω o $\omega + n$, dove n è finito. Va osservato che, in accordo con la definizione generale di ordine, ciascuna di queste disposizioni di interi deve essere considerata come risultante da una relazione definita. *Ad esempio,* quella che semplicemente sposta 2 alla fine sarà definita dalla seguente relazione: " x e y sono interi finiti, e o y è 2 e x non è 2 , oppure nessuno dei due è 2 e x è minore di y ". Quella che mette prima tutti i numeri dispari e poi tutti i numeri pari sarà definita da: " x e y sono interi finiti, e o x è dispari e y è pari oppure x è minore di y ed entrambi sono dispari oppure entrambi sono pari". Di norma non ci preoccuperemo di fornire queste formule in futuro; ma il fatto che fosse *possibile* fornirle è essenziale.

Il numero che abbiamo chiamato ω_1 *,* ovvero il numero di una serie composta da due progressioni, è talvolta chiamato ω_2. La moltiplicazione, come l'addizione, dipende dall'ordine dei fattori: una progressione di coppie dà una serie come

$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n, \ldots,$

che è di per sé una progressione; ma una coppia di progressioni dà una serie che è lunga il doppio di una progressione. È quindi necessario distinguere tra 2ω e *ω.2*. L'uso è variabile; useremo 2ω per una coppia di progressioni e *ω.2 per* una progressione di coppie, e questa decisione ovviamente governa la nostra interpretazione generale di " $\alpha.\beta$ " quando α e β sono numeri di relazione: " $\alpha.\beta$ " dovrà rappresentare una somma opportunamente costruita di α relazioni ciascuna avente β termini.

Possiamo procedere indefinitamente con il processo di riduzione dei numeri induttivi. Ad esempio, possiamo mettere prima i numeri dispari, poi i loro doppi, poi i doppi di questi e così via. Otteniamo così la serie

1 , 3 , 5 , 7 , ... ; 2 , 6 , 10 , 14 , ... ; 4 , 12 , 20 , 28 , ... ;

8 , 24 , 40 , 56 , ...,

di cui il numero è ω^2 , poiché si tratta di una progressione di progressioni. Ognuna delle progressioni in questa nuova serie può ovviamente essere | diradata come abbiamo diradato 92 la nostra progressione originale. Possiamo procedere a $\omega^3, \omega^4, \ldots \omega^\omega,$ e così via; per quanto lontano siamo andati, possiamo sempre andare oltre.

La serie di tutti gli ordinali che si possono ottenere in questo modo, *cioè* tutti quelli che si possono ottenere semplificando una

progressione, è di per sé più lunga di qualsiasi serie che si possa ottenere riorganizzando i termini di una progressione. (Questo non è difficile da dimostrare.) Si può dimostrare che il numero cardinale della classe di tali ordinali è maggiore di $\aleph_0$; è il numero che Cantor chiama $\aleph_1$. Il numero ordinale della serie di tutti gli ordinali che si possono formare da un $\aleph_0$, presi in ordine di grandezza, è chiamato ω_1 . Quindi una serie il cui numero ordinale è ω_1 ha un campo il cui numero cardinale è $\aleph_1$.

Possiamo procedere da ω_1 e $\aleph$ 1 a ω_2 e $\aleph$ 2 mediante un processo esattamente analogo a quello con cui siamo passati da ω e $\aleph$ 0 a ω_1 e $\aleph$ 1. E nulla ci impedisce di procedere indefinitamente in questo modo verso nuovi cardinali e nuovi ordinali. Non si sa se $\aleph$ 0 sia uguale a uno qualsiasi dei cardinali della serie degli Aleph. Non si sa nemmeno se sia paragonabile a essi in grandezza; per quanto ne sappiamo, potrebbe non essere né uguale, né maggiore, né minore di alcuno degli Aleph. Questa questione è connessa all'assioma moltiplicativo, di cui parleremo più avanti.

Tutte le serie che abbiamo considerato finora in questo capitolo sono quelle che vengono definite “ben ordinate”. Una serie ben ordinata è una serie che ha un inizio, termini consecutivi e un termine *successivo* a qualsiasi selezione dei suoi termini, a condizione che vi siano termini dopo la selezione. Questo esclude, da un lato, le serie compatte, in cui vi sono termini tra due qualsiasi, e dall'altro le serie che non hanno un inizio, o in cui vi sono parti subordinate che non hanno un inizio. La serie di numeri interi negativi in ordine di grandezza, che non ha un inizio

ma termina con −1 , non è ben ordinata; ma presa in ordine inverso, iniziando con −1 , è ben ordinata, essendo di fatto una progressione. La definizione è: |

Una serie “ben ordinata” è una serie in cui ogni 93 sottoclasse (eccetto, ovviamente, la classe nulla) ha un primo termine.

Un numero “ordinale” indica il numero di relazione di una serie ben ordinata. È quindi una tipologia di numero seriale.

Nell'ambito delle serie ben ordinate, si applica una forma generalizzata di induzione matematica. Una proprietà si può dire "transfinitamente ereditaria" se, quando appartiene a una certa selezione di termini di una serie, appartiene anche al loro successore immediato, a condizione che ne abbiano uno. In una serie ben ordinata, una proprietà transfinitamente ereditaria appartenente al primo termine della serie appartiene all'intera serie. Ciò permette di dimostrare molte proposizioni riguardanti le serie ben ordinate che non sono vere per tutte le serie.

È facile disporre i numeri induttivi in serie non ben ordinate, e persino in serie compatte. Ad esempio, possiamo adottare il seguente schema: consideriamo i numeri decimali da ·1 (incluso) a 1 (escluso), disposti in ordine di grandezza. Questi formano una serie compatta; tra due qualsiasi ce ne sono sempre infiniti altri. Ora omettiamo il punto all'inizio di ciascuno e otteniamo una serie compatta composta da tutti gli interi finiti tranne quelli divisibili per 10. Se vogliamo includere quelli divisibili per 10 , non c'è difficoltà ; invece di iniziare con ·1 , includeremo tutti i

decimali minori di 1 , ma quando rimuoviamo il punto, sposteremo a destra tutti gli 0 che compaiono all'inizio del nostro decimale. Omettendo questi e tornando a quelli che non hanno 0 all'inizio, possiamo enunciare la regola per la disposizione dei nostri interi come segue: di due interi che non iniziano con la stessa cifra, viene prima quello che inizia con la cifra più piccola. Di due che iniziano con la stessa cifra, ma differiscono per la seconda cifra, viene prima quello con la seconda cifra più piccola, ma prima di tutto quello senza seconda cifra; e così via. In generale, se due interi concordano per quanto riguarda le prime *n* cifre, ma non per quanto riguarda la (*n* + 1) $^{-esima}$, viene prima quello che non ha la (*n* + 1) $^{-esima}$ cifra o ne ha una più piccola dell'altro. Questa regola di disposizione, come il lettore può facilmente convincersi, 94 dà origine a una serie compatta contenente tutti gli interi non divisibili per 10 ; E, come abbiamo visto, non c'è alcuna difficoltà nell'includere quelli divisibili per 10. Da questo esempio segue che è possibile costruire serie compatte con ℵ0 termini . Infatti, abbiamo già visto che esistono ℵ0 rapporti , e i rapporti in ordine di grandezza formano una serie compatta; quindi abbiamo qui un altro esempio. Riprenderemo questo argomento nel prossimo capitolo.

Delle usuali leggi formali di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza, tutte sono rispettate dai cardinali transfiniti, ma solo alcune sono rispettate dagli ordinali transfiniti, e quelle che sono rispettate da questi ultimi sono rispettate da tutti i numeri di relazione. Per “usuali leggi formali” intendiamo le seguenti:

I. La legge commutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$.

II. La legge associativa:

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ e $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$.

III. La legge distributiva: $\alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Quando la legge commutativa non è valida, la suddetta forma della legge distributiva deve essere distinta da

$(\beta + \gamma) \alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$.

Come vedremo subito, una forma può essere vera e l'altra falsa.

IV. Le leggi dell'elevamento a potenza:

$$\alpha^{\beta} . \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta + \gamma} , \quad \alpha^{\gamma} . \beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma} , \qquad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma} .$$

Tutte queste leggi valgono per i cardinali, siano essi finiti o infiniti, e per gli ordinali *finiti* . Ma quando si arriva agli ordinali infiniti, o in effetti ai numeri di relazione in generale, alcune valgono e altre no. La legge commutativa non vale; la legge associativa vale; la legge distributiva (adottando la convenzione che abbiamo adottato sopra per quanto riguarda l' ordine dei fattori in un prodotto) vale nella forma

$(\beta + \gamma) \alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$,

ma non nella forma

$\alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

le leggi esponenziali

$\alpha\,\beta\,.\alpha\,\gamma = \alpha\,\beta + \gamma$ e $(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,\beta\gamma$

restano validi, ma non la legge

$\alpha^{\gamma}.\beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma}$,

che è ovviamente collegato alla proprietà commutativa della moltiplicazione.

Le definizioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza assunte nelle proposizioni precedenti sono alquanto complesse. Il lettore che desideri conoscerle e comprendere la dimostrazione delle suddette leggi dovrà consultare il secondo volume dei *Principia Mathematica* , $*172 - 176$.

L'aritmetica transfinita ordinale fu sviluppata da Cantor in una fase precedente rispetto all'aritmetica transfinita cardinale, perché presentava vari usi matematici tecnici che lo condussero a tale sviluppo. Ma dal punto di vista della filosofia della matematica è meno importante e meno fondamentale della teoria dei cardinali transfiniti. I cardinali sono essenzialmente più semplici degli ordinali, ed è una curiosa coincidenza storica che siano apparsi inizialmente come astrazione di questi ultimi, e solo gradualmente siano stati studiati per conto proprio. Questo non si applica al lavoro di Frege, in cui i cardinali, finiti e transfiniti, furono trattati in completa indipendenza dagli ordinali; ma fu il lavoro di Cantor a far conoscere al mondo l'argomento, mentre quello di Frege rimase quasi sconosciuto, probabilmente soprattutto a causa della difficoltà del suo simbolismo. E i matematici, come altre persone, hanno più difficoltà a

comprendere e utilizzare nozioni che sono relativamente "semplici" in senso logico che a manipolare nozioni più complesse che sono più simili alla loro pratica ordinaria 96. Per queste ragioni, solo gradualmente si è riconosciuta la vera importanza dei cardinali nella filosofia matematica. L'importanza degli ordinali, sebbene non piccola, è nettamente inferiore a quella dei cardinali, ed è in gran parte fusa con quella della concezione più generale dei numeri relazionali.

Capitolo X Limiti e continuità

Il concetto di "limite" ha acquisito un'importanza sempre maggiore in matematica rispetto a quanto si pensasse. L'intero calcolo differenziale e integrale, e praticamente tutto ciò che riguarda la matematica superiore, si basa sui limiti. In passato si supponeva che gli infinitesimi fossero alla base di queste discipline, ma Weierstrass ha dimostrato che si tratta di un errore: laddove si pensava che gli infinitesimi comparissero, in realtà si riscontra un insieme di quantità finite il cui limite inferiore è zero. Si riteneva che "limite" fosse una nozione essenzialmente quantitativa, ovvero la nozione di una quantità alla quale altre quantità si avvicinavano sempre di più, in modo che tra queste ultime ve ne fosse una che differiva di una quantità inferiore a quella assegnata. In realtà, però, la nozione di "limite" è puramente ordinale e non implica alcuna quantità (tranne che per caso, quando la serie in questione risulta essere quantitativa). Un dato punto su una retta può essere il limite di un insieme di punti sulla retta, senza che sia necessario introdurre coordinate, misure

o qualsiasi altro dato quantitativo. Il numero cardinale $\aleph_0$ è il limite (nell'ordine di grandezza) dei numeri cardinali 1, 2 , 3 , ... , n , ... , sebbene la differenza numerica tra $\aleph_0$ e un cardinale finito sia costante e infinita: da un punto di vista quantitativo, i numeri finiti non si avvicinano a $\aleph_0$ man mano che crescono. Ciò che rende $\aleph_0$ il limite dei numeri finiti è il fatto che, nella serie, li segue immediatamente, il che è un fatto *ordinale* , non quantitativo.

Esistono varie forme della nozione di “lim- 98 it”, di complessità crescente. La forma più semplice e fondamentale, da cui derivano le altre, è già stata definita, ma qui ripeteremo le definizioni che vi conducono, in una forma generale in cui non richiedono che la relazione in questione sia seriale. Le definizioni sono le seguenti:

I “minimi” di una classe *α* rispetto a una relazione P sono quegli elementi di *α* e del campo di P (se esiste) a cui nessun elemento di *α* ha la relazione P.

I “massimi” rispetto a P sono i minimi rispetto all’inverso di P.

I “sequenti” di una classe *α* rispetto a una relazione P sono i minimi dei “successori” di *α* , e i “successori” di *α* sono quei membri del campo di P a cui ogni membro della parte comune di *α* e del campo di P ha la relazione P.

I “precedenti” rispetto a P sono i sequenti rispetto al contrario di P.

I “limiti superiori” di *α* rispetto a P sono i sequenti a condizione che *α* non abbia un massimo; ma se *α* ha un massimo, non ha limiti superiori.

I “limiti inferiori” rispetto a P sono i limiti superiori rispetto al reciproco di P.

Ogniqualvolta P ha connettività, una classe può avere al massimo un massimo, un minimo, un sequente, ecc. Pertanto, nei casi che ci interessano nella pratica, possiamo parlare di " *limite* " (se esiste).

Quando P è una relazione seriale, possiamo semplificare notevolmente la definizione di limite di cui sopra. In tal caso, possiamo definire prima il "confine" di una classe α , *ovvero* il suo limite o massimo, e poi procedere a distinguere il caso in cui il confine è il limite dal caso in cui è un massimo. A questo scopo è meglio utilizzare la nozione di "segmento".

Parleremo del “segmento di P definito da una classe α ” come di tutti quei termini che hanno la relazione P con uno o più membri di α . Questo sarà un segmento nel senso definito nel Capitolo VII; 99 infatti, ogni segmento nel senso ivi definito è il segmento definito da *qualche* classe α . Se P è seriale, il segmento definito da α è costituito da tutti i termini che precedono qualche termine di α . Se α ha un massimo, il segmento sarà costituito da tutti i predecessori del massimo. Ma se α non ha un massimo, ogni membro di α precede qualche altro membro di α , e l'intero α è quindi incluso nel segmento definito da α . Prendiamo, ad esempio, la classe costituita dalle frazioni

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, 2$$

ovvero di tutte le frazioni della forma $1 - 1 / 2^{n}$ per diversi valori finiti di n . Questa serie di frazioni non ha un massimo, ed è chiaro che il segmento che definisce (nell'intera serie di frazioni in ordine di grandezza) è la classe di tutte le frazioni proprie. Oppure, ancora, si considerino i numeri primi, considerati come una selezione dei cardinali (finiti e infiniti) in ordine di grandezza. In questo caso il segmento definito è costituito da tutti gli interi finiti.

Supponendo che P sia seriale, il "confine" di una classe α sarà il termine x (se esiste) i cui predecessori sono il segmento definito da α .

Un "massimo" di α è un confine che appartiene ad α .

Un "limite superiore" di α è un confine che non appartiene ad α .

Se una classe non ha confini, non ha né massimo né limite. Questo è il caso di un taglio di Dedekind "irrazionale", o di quello che viene chiamato un "gap".

Pertanto, il "limite superiore" di un insieme di termini α rispetto a una serie P è quel termine x (se esiste) che viene dopo tutti gli α , ma è tale che ogni termine precedente viene prima di alcuni degli α .

Possiamo definire tutti i "limiti superiori" di un insieme di termini β come tutti quelli che sono i limiti superiori di insiemi di termini scelti da β . Dovremo, ovviamente, distinguere i limiti superiori dai limiti inferiori. Se consideriamo, ad esempio, la serie dei numeri ordinali:

□, □, □, … ω, ω + □, … □ ω, □ ω + □, …

□ ω, … ω □, … ω □, …, |

i punti limite superiori del campo di questa serie 100 sono quelli che non hanno predecessori immediati, *vale a dire*

□, ω, □ ω, □ ω, … ω □, ω □ + ω, … □ ω □, … ω □…

I punti limite superiori del campo di questa nuova serie saranno

□, ω □, □ ω □, … ω □, ω □ + ω □…

D'altra parte, la serie degli ordinali – e in effetti ogni serie ben ordinata – non ha estremi inferiori, perché non ci sono termini, eccetto l'ultimo, che non abbiano successori immediati. Ma se consideriamo una tale serie come la serie dei rapporti, ogni elemento di questa serie è sia un estremo superiore che inferiore per insiemi opportunamente scelti. Se consideriamo la serie dei numeri reali e selezioniamo da essa i numeri razionali, questo insieme (i razionali) avrà tutti i numeri reali come estremi superiori e inferiori. Gli estremi di un insieme sono chiamati la sua "derivata prima", e gli estremi della derivata prima sono chiamati derivata seconda, e così via.

Per quanto riguarda i limiti, possiamo distinguere vari gradi di quella che potremmo definire "continuità" in una serie. Il termine "continuità" era in uso da tempo, ma era rimasto privo di una definizione precisa fino all'epoca di Dedekind e Cantor. Entrambi gli studiosi attribuirono un significato preciso al termine, ma la definizione di Cantor è più ristretta di quella di Dedekind: una

serie che presenta continuità cantoriana deve necessariamente presentare continuità dedekindiana, ma non viceversa.

La prima definizione che verrebbe spontanea a chi cerca un significato preciso per la continuità di una serie sarebbe quella di definirla come consistente in ciò che abbiamo chiamato "compattezza", *ovvero* nel fatto che tra due termini qualsiasi della serie ve ne siano altri. Ma questa sarebbe una definizione inadeguata, a causa dell'esistenza di "lacune" in serie come quella dei rapporti. Abbiamo visto nel Capitolo VII che esistono innumerevoli modi in cui la serie dei rapporti può essere divisa in due parti, di cui una precede completamente l'altra, e di cui la prima non ha un ultimo termine, mentre la seconda non ha un primo termine. Tale stato di cose sembra contrario alla vaga sensazione che abbiamo di ciò che dovrebbe caratterizzare la "continuità" e, inoltre, dimostra che la serie dei rapporti non è il tipo di serie necessaria per molti scopi matematici. Prendiamo la geometria, ad esempio: vorremmo poter affermare che quando due rette si intersecano, esse hanno un punto in comune, ma se la serie di punti su una retta fosse simile alla serie di rapporti, le due rette potrebbero intersecarsi in un "intervallo" e non avere alcun punto in comune. Questo è un esempio semplicistico, ma se ne potrebbero fornire molti altri per dimostrare che la compattezza è inadeguata come definizione matematica di continuità.

Furono soprattutto le esigenze della geometria a portare alla definizione di continuità "dedekindiana". Ricordiamo che abbiamo

definito una serie come dedekindiana quando ogni sottoclasse del campo ha un confine. (È sufficiente supporre che esista sempre un confine *superiore* , o che esista sempre un confine *inferiore* . Se si assume una di queste due ipotesi, l'altra può essere dedotta.) Vale a dire, una serie è dedekindiana quando non ci sono lacune. L'assenza di lacune può derivare sia dal fatto che i termini hanno dei successori, sia dall'esistenza di limiti in assenza di massimi. Pertanto, una serie finita o una serie ben ordinata è dedekindiana, così come la serie dei numeri reali. Il primo tipo di serie dedekindiana è escluso se si assume che la nostra serie sia compatta; in tal caso la nostra serie deve avere una proprietà che, per molti scopi, può essere opportunamente chiamata continuità. Siamo quindi condotti alla seguente definizione:

Una serie possiede “continuità dedekindiana” quando è dedekindiana e compatta.

Ma questa definizione è ancora troppo ampia per molti scopi. Supponiamo, ad esempio, di voler assegnare allo spazio geometrico proprietà tali da garantire che ogni punto possa essere specificato mediante coordinate che siano numeri reali: ciò non è garantito dalla sola continuità dedekindiana. Vogliamo essere sicuri che ogni punto che non può essere specificato da coordinate *razionali possa essere specificato come limite di una progressione* di punti le cui coordinate sono razionali, e questa è un'ulteriore proprietà che la nostra definizione non ci permette di dedurre.

Siamo quindi indotti ad esaminare più da vicino le serie in relazione ai limiti. Tale esame fu condotto da Cantor e costituì la base della sua definizione di continuità, sebbene, nella sua forma più semplice, questa definizione celi in qualche modo le considerazioni che l'hanno generata. Pertanto, prima di fornire la sua definizione di continuità, esamineremo alcuni dei concetti di Cantor in questo ambito.

Cantor definisce una serie "perfetta" quando tutti i suoi punti sono punti limite e tutti i suoi punti limite le appartengono. Ma questa definizione non esprime in modo del tutto preciso ciò che intende. Non è necessaria alcuna correzione per quanto riguarda la proprietà che tutti i suoi punti siano punti limite; questa è una proprietà delle serie compatte, e non di altre se tutti i punti sono punti limite superiori o tutti punti limite inferiori. Ma se si assume solo che siano punti limite in un senso, senza specificare in quale, esisteranno altre serie che avranno la proprietà in questione, ad esempio la serie dei decimali in cui un decimale che termina con un 9 periodico è distinto dal corrispondente decimale finale e posto immediatamente prima di esso. Tale serie è quasi compatta, ma ha termini eccezionali che sono consecutivi, e di cui il primo non ha un predecessore immediato, mentre il secondo non ha un successore immediato. A parte tali serie, le serie in cui ogni punto è un punto limite sono serie compatte; e ciò vale senza riserve se si specifica che ogni punto deve essere un punto limite superiore (o che ogni punto deve essere un punto limite inferiore).

Sebbene Cantor non consideri esplicitamente la questione, dobbiamo distinguere diversi tipi di punti limite in base alla natura della più piccola sottoserie mediante la quale possono essere definiti. Cantor presuppone che siano definiti da progressioni o da regressioni (che sono le inverse delle progressioni). Quando ogni membro della nostra serie è il limite di una progressione o di una regressione, Cantor chiama la nostra

serie "condensata in sé" (*insichdicht*). |

Passiamo ora alla seconda proprietà in base alla quale doveva essere definita la perfezione 103 , vale a dire la proprietà che Cantor chiama quella di essere "chiuso" (*abgeschlossen*). Questa, come abbiamo visto, fu definita per la prima volta come composta

nel fatto che tutti i punti limite di una serie appartengono ad essa. Ma questo ha un significato effettivo solo se la nostra serie è data *come* contenuta in qualche altra serie più grande (come accade, *ad esempio* , con una selezione di numeri reali), e i punti limite sono presi in relazione alla serie più grande. Altrimenti, se una serie è considerata semplicemente per se stessa, non può non contenere i suoi punti limite. Ciò che Cantor *intende* non è esattamente ciò che dice; anzi, in altre occasioni dice qualcosa di piuttosto diverso , che è ciò che intende. Ciò che intende veramente è che ogni serie subordinata che è del tipo che ci si potrebbe aspettare abbia un limite ha un limite all'interno della serie data; *cioè* ogni serie subordinata che non ha un massimo ha un limite, *cioè* ogni serie subordinata ha un confine. Ma Cantor

non afferma questo per *ogni* serie subordinata, ma solo per progressioni e regressioni. (Non è chiaro fino a che punto riconosca che questa è una limitazione.) Quindi, infine, troviamo che la definizione che vogliamo è la seguente:

Una serie si dice “chiusa” *quando* ogni progressione o regressione contenuta nella serie ha un limite nella serie stessa.

Abbiamo quindi l'ulteriore definizione:

Una serie è “perfetta” quando è *condensata in se stessa* e *chiusa* , *ovvero* quando ogni termine è il limite di una progressione o regressione, e ogni progressione o regressione contenuta nella serie ha un limite nella serie stessa.

Nella ricerca di una definizione di continuità, Cantor intende trovare una definizione che si applichi alla serie dei numeri reali e a qualsiasi serie simile, ma a nessun'altra. A tal fine, dobbiamo aggiungere un'ulteriore proprietà. Tra i numeri reali, alcuni sono razionali, altri irrazionali; sebbene il numero di irrazionali sia maggiore del numero di razionali, esistono comunque dei razionali tra due numeri reali qualsiasi, per quanto piccoli possano essere la differenza tra i due . Il numero di razionali, come abbiamo visto, è $\aleph_0$. Questo fornisce un'ulteriore proprietà sufficiente a caratterizzare completamente la continuità, ovvero la proprietà di contenere una classe di $\aleph_0$ elementi in modo tale che alcuni di questi elementi si trovino tra due termini qualsiasi della nostra serie, per quanto vicini tra loro. Questa proprietà, perfezionata, è sufficiente a definire una classe di serie che sono

tutte simili e che di fatto costituiscono un numero seriale. Cantor definisce questa classe come quella delle serie continue.

Possiamo semplificare leggermente la sua definizione. Per cominciare, diciamo:

Una “classe mediana” di una serie è una sottoclasse del campo tale che i suoi elementi si trovano tra due qualsiasi termini della serie.

Pertanto, i numeri razionali costituiscono una classe mediana nella serie dei numeri reali. È ovvio che non possono esistere classi mediane se non nelle serie compatte.

Troviamo quindi che la definizione di Cantor è equivalente alla seguente:

Una serie è “continua” quando (1) è Dedekindiana, (2) contiene una classe mediana avente $\aleph_0$ termini.

Per evitare confusione, ci riferiremo a questo tipo come "continuità cantoriana". Si vedrà che implica continuità dedekindiana, ma non viceversa. Tutte le serie che presentano continuità cantoriana sono simili, ma non tutte le serie che presentano continuità dedekindiana.

Le nozioni di *limite* e *continuità* che abbiamo definito non devono essere confuse con le nozioni di limite di una funzione per avvicinamenti a un dato argomento, o di continuità di una funzione nell'intorno di un dato argomento. Si tratta di nozioni diverse , molto importanti, ma derivate dalle precedenti e più

complesse. La continuità del moto (se il moto è continuo) è un esempio di continuità di una funzione; d'altra parte, la continuità dello spazio e del tempo (se sono continui) è un esempio di continuità di serie, o (per dirla con più cautela) di un tipo di continuità che può, mediante sufficienti manipolazioni matematiche , essere ridotta alla continuità di serie. 105 In considerazione della fondamentale importanza del moto nella matematica applicata, nonché per altre ragioni, sarà opportuno trattare brevemente le nozioni di limite e continuità applicate alle funzioni; ma questo argomento sarà meglio riservato a un capitolo a parte.

Le definizioni di continuità che abbiamo esaminato, ovvero quelle di Dedekind e Cantor, non corrispondono molto all'idea vaga che il termine ha nella mente dell'uomo comune o del filosofo. Esse concepiscono la continuità piuttosto come assenza di separazione, quel tipo di generale annientamento delle distinzioni che caratterizza una fitta nebbia. La nebbia dà un'impressione di vastità senza molteplicità o divisione definite. È questo il tipo di cosa che un metafisico intende per "continuità", dichiarando, veritieramente, che essa è caratteristica della sua vita mentale e di quella dei bambini e degli animali.

L'idea generale vagamente indicata dalla parola "continuità", quando così usata, o dalla parola "flusso", è certamente ben diversa da quella che abbiamo definito. Prendiamo, ad esempio, la successione dei numeri reali. Ciascuno è ciò che è, in modo definitivo e inequivocabile; non passa, per impercettibili gradi, a

un altro; è un'unità solida e separata, e la sua distanza da ogni altra unità è finita, sebbene possa essere resa inferiore a qualsiasi quantità finita assegnata in anticipo. La questione della relazione tra il tipo di continuità esistente tra i numeri reali e il tipo esibito, *ad esempio* , da ciò che osserviamo in un dato momento, è complessa e intricata. Non si può sostenere che i due tipi siano semplicemente identici, ma si può, a mio avviso, sostenere con molta ragione che la concezione matematica che abbiamo considerato in questo capitolo fornisce lo schema logico astratto al quale deve essere possibile ricondurre il materiale empirico mediante opportune manipolazioni, se tale materiale deve essere definito "continuo" in un senso precisamente definibile. Sarebbe del tutto impossibile giustificare questa tesi del 106 entro i limiti del presente volume. Il lettore interessato può consultare un tentativo di giustificazione, in particolare per quanto riguarda *il tempo,* da parte del presente autore nel *Monist* del 1914-5 , nonché in alcune parti di *La nostra conoscenza del mondo esterno* . Con queste premesse, dobbiamo abbandonare questo problema, per quanto interessante, per tornare ad argomenti più strettamente connessi alla matematica.

Capitolo XI Limiti e continuità delle funzioni

In questo capitolo ci occuperemo della definizione del limite di una funzione (se esiste) quando l'argomento si avvicina a un dato valore, e anche della definizione di cosa si intende per "funzione continua". Entrambe queste idee sono piuttosto tecniche e difficilmente richiederebbero un trattamento in una semplice introduzione alla filosofia matematica, se non fosse per il fatto che, soprattutto attraverso il cosiddetto calcolo infinitesimale, le errate concezioni sui nostri argomenti attuali si sono radicate così profondamente nelle menti dei filosofi professionisti che è necessario uno sforzo prolungato e considerevole per sradicarle. Si è pensato fin dai tempi di Leibniz che il calcolo differenziale e integrale richiedesse quantità infinitesime. I matematici (in particolare Weierstrass) hanno dimostrato che questo è un errore; ma gli errori incorporati, *ad esempio* in ciò che Hegel dice sulla matematica, sono duri a morire, e i filosofi hanno teso a ignorare il lavoro di uomini come Weierstrass.

I limiti e la continuità delle funzioni, nelle opere di matematica ordinaria, sono definiti in termini che coinvolgono i numeri. Ciò non è essenziale, come ha dimostrato il Dr. Whitehead. [22] Inizieremo, tuttavia, con le definizioni presenti nei libri di testo, e procederemo in seguito a mostrare come queste definizioni possano essere generalizzate in modo da applicarsi alle serie in generale, e non solo a quelle numeriche o numericamente misurabili.

Consideriamo una qualsiasi funzione matematica ordinaria *fx* , dove | *x*| e *fx* sono entrambi numeri reali, 108 e *fx* è monovalore, *cioè* quando *x* è dato, c'è solo un valore che *fx* può assumere. Chiamiamo *x* l'"argomento" e *fx* il "valore per l'argomento *x* ". Quando una funzione è ciò che diciamo "continua", l'idea generale per cui cerchiamo una definizione precisa è che piccole differenze in x *dovrebbero* corrispondere a piccole differenze in *fx* , e se rendiamo le differenze in x *sufficientemente* piccole, possiamo far sì che le differenze in *fx* scendano al di sotto di qualsiasi quantità assegnata. Non vogliamo, se una funzione deve essere continua, che ci siano salti improvvisi, in modo che, per qualche valore di *x* , qualsiasi cambiamento, per quanto piccolo, faccia

una variazione di *fx* che supera una certa quantità finita assegnata. Le normali funzioni matematiche hanno questa proprietà: appartiene, ad esempio, a x^2, x^3, ... log *x,* sin *x* e così via. Ma non è affatto difficile definire le funzioni discontinue. Prendiamo, come esempio non matematico, "il luogo di nascita della persona più giovane vivente al tempo *t* ". Questa è una funzione di *t* ; il suo valore è costante dal momento della nascita di una persona al momento della nascita successiva, e poi il valore cambia *improvvisamente* da un luogo di nascita all'altro. Un esempio matematico analogo sarebbe "l'intero immediatamente inferiore a *x* ", dove *x* è un numero reale. Questa funzione rimane costante da un intero all'altro, e poi presenta un salto improvviso. Il fatto è che, sebbene le funzioni continue siano

più familiari, sono l'eccezione: esistono infinite funzioni discontinue rispetto a quelle continue.

Molte funzioni sono discontinue per uno o più valori della variabile, ma continue per tutti gli altri valori. Prendiamo ad esempio sin 1 */x* . La funzione sin *θ* passa attraverso tutti i valori da -1 a 1 ogni volta che *θ* passa da -π / 2 a *π/* 2 , o da *π/* 2 a 3π / 2 , o in generale da (2n - 1) *π/* 2 a (2n + 1) *π/* 2 , dove *n* è un intero qualsiasi. Ora, se consideriamo 1 */x* quando *x* è molto piccolo, vediamo che man mano che *x* diminuisce 1 */x* cresce sempre più velocemente, in modo da passare sempre più rapidamente attraverso il ciclo di valori da un multiplo di *π/* 2 a un altro man mano che *x* diventa sempre più piccolo. Di conseguenza , sin 1 */x* passa sempre più rapidamente da -1 a 1 e viceversa, man mano che *x* = 109 diventa più piccolo. Infatti, se prendiamo un qualsiasi intervallo contenente 0 , diciamo l'intervallo da -ǫ a + ǫ , doveǫ è *un* numero molto piccolo, sin 1 */x* compirà un numero infinito di oscillazioni in questo intervallo, e non possiamo diminuire le oscillazioni riducendo l'intervallo. Quindi, in tondo, la funzione 0 è discontinua. È facile costruire funzioni che sono discontinue in più punti, o in ℵ0 punti, o ovunque. Esempi si possono trovare in qualsiasi libro sulla teoria delle funzioni di una variabile reale.

Procedendo ora a cercare una definizione precisa di cosa si intenda per dire che una funzione è continua per un dato argomento, quando argomento e valore sono entrambi numeri reali, definiamo innanzitutto un "intorno" di un numero *x* come tutti i numeri da *x* − ǫ a *x* + ǫ , dove ǫ è un numero che, in casi

importanti, sarà molto piccolo. È chiaro che la continuità in un dato punto ha a che fare con ciò che accade in *qualsiasi* intorno di quel punto, per quanto piccolo.

Ciò che desideriamo è questo: se *a* è l'argomento per il quale vogliamo che la nostra funzione sia continua, definiamo innanzitutto un intorno (diciamo *α*) contenente il valore *fa* che la funzione assume per l'argomento *a* ; desideriamo che, se prendiamo un intorno sufficientemente piccolo contenente *a* , tutti i valori per gli argomenti in questo intorno siano contenuti nell'intorno *α* , non importa quanto piccolo abbiamo reso *α* . Vale a dire, se decretiamo che la nostra funzione non debba differire da fa *di* più di una quantità piccolissima, possiamo sempre trovare un intervallo di numeri reali, avente *a* nel mezzo, tale che in questo intervallo *fx* non differisca da fa *di* più della quantità piccolissima prescritta. E questo deve rimanere vero qualunque quantità piccolissima scegliamo. Quindi siamo condotti alla seguente definizione:

Si dice che la funzione *f* (*x*) è “continua” per l’argomento *a* se, per ogni numero positivo *σ* , diverso da 0 , ma piccolo quanto vogliamo, esiste un numero positivo *ϱ* , diverso da 0 , tale che, per tutti i valori di *δ* che sono numericamente | minori [23] di *ϱ* , 110 la differenza *f* (*a* + *δ*) − *f* (a *)* è numericamente minore di *σ* .

In questa definizione, *σ* definisce innanzitutto un intorno di *f* (*a*), ovvero l'intorno da *f* (*a*) − *σ* a *f* (*a*) + *σ* . La definizione prosegue poi affermando che possiamo (per mezzo di *ϱ*) definire un intorno, ovvero quello da *a* − *ϱ* a *a* + *ϱ* , tale che, per tutti gli argomenti

all'interno di questo intorno, il valore della funzione si trovi all'interno dell'intorno da $f(a) - \sigma$ a $f(a) + \sigma$. Se ciò è possibile, indipendentemente da come venga scelto σ, *la funzione è "continua" per l'argomento* a.

Finora non abbiamo definito il "limite" di una funzione per un dato argomento. Se lo avessimo fatto, avremmo potuto definire la continuità di una funzione in modo diverso: una funzione è continua in un punto in cui il suo valore è uguale al limite dei suoi valori per avvicinamenti dall'alto o dal basso. Ma solo le funzioni eccezionalmente "tranquille" hanno un limite definito quando l'argomento si avvicina a un dato punto. La regola generale è che una funzione oscilla e che, dato un qualsiasi intorno di un dato argomento, per quanto piccolo, si verificherà un intero intervallo di valori per gli argomenti all'interno di questo intorno. Poiché questa è la regola generale, consideriamola per prima.

Consideriamo cosa può accadere quando l'argomento si avvicina a un certo valore a dal basso. In altre parole, vogliamo considerare cosa succede per argomenti compresi nell'intervallo da $a - \varrho$ ad a, dove ϱ è un numero che, in casi importanti, sarà molto piccolo.

I valori della funzione per gli argomenti da $a - \varrho$ ad a (a escluso) saranno un insieme di numeri reali che definiranno una certa sezione dell'insieme dei numeri reali, vale a dire la sezione costituita da quei numeri che non sono maggiori di *tutti* i valori per gli argomenti da $a - \varrho$ ad a. Dato un qualsiasi numero in questa sezione, ci sono valori almeno pari a questo numero per gli argomenti tra $a - \varrho$ e a.

cioè per argomenti che sono molto vicini a 111 *(* se *ǫ* è molto piccolo). Prendiamo tutti i possibili ǫ *e* tutte le possibili sezioni corrispondenti. La parte comune di tutte queste sezioni la chiameremo "sezione ultima" man mano che l'argomento si avvicina *ad a* . Dire che un numero *z* appartiene alla sezione ultima significa dire che, per quanto piccolo possiamo rendere *ǫ* , ci sono argomenti tra *a* − *ǫ* e *a* per i quali il valore della funzione non è inferiore a *z* .

Possiamo applicare esattamente lo stesso processo alle sezioni superiori, *ovvero* alle sezioni che vanno da un certo punto verso l'alto, invece che dal basso verso l'alto. Qui prendiamo quei numeri che non sono *minori* di tutti i valori degli argomenti da *a* − *ǫ* ad *a* ; questo definisce una sezione superiore che varierà al variare *di ǫ* . Prendendo la parte comune di tutte queste sezioni per tutti i possibili *ǫ* , otteniamo la "sezione superiore ultima". Dire che un numero *z* appartiene alla sezione superiore ultima significa dire che, per quanto piccolo rendiamo *ǫ* , ci sono argomenti tra *a* − *ǫ* e *a* per i quali il valore della funzione non è *maggiore* di *z* .

Se un termine *z* appartiene sia alla sezione ultima che alla sezione superiore ultima, diremo che appartiene all'"oscillazione ultima". Possiamo illustrare la questione considerando ancora una volta la funzione sin 1 */x* quando *x* si avvicina al valore 0. Supponiamo, per coerenza con le definizioni precedenti, che questo valore venga raggiunto dal basso.

Cominciamo con la “sezione ultima”. Tra −ǫ e 0 , qualunque sia il valore *di ǫ* , la funzione assumerà il valore 1 per certi argomenti,

ma non assumerà mai un valore maggiore. Pertanto, la sezione ultima è costituita da tutti i numeri reali, positivi e negativi, fino a 1 incluso ; *ovvero* è costituita da tutti i numeri negativi insieme a 0 , insieme ai numeri positivi fino a 1 incluso .

Analogamente, la “sezione superiore ultima” è costituita da tutti i numeri positivi insieme a 0 , insieme ai numeri negativi fino a -1 incluso .

Pertanto, l'“oscillazione ultima” è costituita da tutti i numeri reali da −1 a 1 , entrambi inclusi .

Possiamo dire in generale che l'“oscillazione ultima ” di una funzione quando l'argomento si avvicina *ad a* dal basso consiste in tutti quei numeri x tali che, per quanto ci avviciniamo ad a , troveremo ancora valori grandi quanto x e valori piccoli quanto x .

L'oscillazione ultima può non contenere termini, oppure contenerne uno, oppure contenerne molti. Nei primi due casi, la funzione ha un limite definito per gli avvicinamenti dal basso. Se l'oscillazione ultima ha un solo termine, ciò è abbastanza ovvio. È altrettanto vero se non ne ha; infatti, non è difficile dimostrare che, se l'oscillazione ultima è nulla, il confine della sezione ultima coincide con quello della sezione superiore ultima e può essere definito come il limite della funzione per gli avvicinamenti dal basso. Ma se l'oscillazione ultima ha molti termini, non esiste un limite definito per la funzione per gli avvicinamenti dal basso. In questo caso possiamo considerare i limiti inferiore e superiore dell'oscillazione ultima (*ovvero* il limite inferiore della sezione

superiore ultima e il limite superiore della sezione ultima) come i limiti inferiore e superiore dei suoi valori "ultimi" per gli avvicinamenti dal basso. Analogamente, otteniamo i limiti inferiore e superiore dei valori "ultimi" per gli avvicinamenti dall'alto. Pertanto, nel caso generale, abbiamo *quattro* limiti per una funzione per gli avvicinamenti a un dato argomento. *Il* limite per un dato argomento *a* esiste solo quando tutti e quattro questi sono uguali, e rappresenta quindi il loro valore comune. Se coincide anche con il *valore* per l'argomento *a* , la funzione è continua per tale argomento. Questo può essere considerato come la definizione di continuità: è equivalente alla nostra definizione precedente.

Possiamo definire il limite di una funzione per un dato argomento (se esiste) senza passare attraverso l'oscillazione ultima e i quattro limiti del caso generale. La definizione procede, in tal caso, proprio come procedeva la precedente definizione di continuità. Definiamo il limite per gli avvicinamenti dal basso. Se deve esistere un limite definito per gli avvicinamenti ad *a* dal basso, è necessario e sufficiente che , dato un qualsiasi piccolo numero σ *,* due valori per argomenti sufficientemente vicini ad *a* (ma entrambi minori di *a*) differiscano di meno di *σ* ; *cioè,* se *ϱ* è sufficientemente piccolo e 113 i nostri argomenti sono entrambi compresi tra *a* − *ϱ* e *a* (*a* escluso), allora la differenza tra i valori per questi argomenti sarà minore di *σ* . Questo deve valere per qualsiasi *σ* , per quanto piccolo; in tal caso la funzione ha un limite per gli avvicinamenti dal basso. Allo stesso modo definiamo il caso in cui esiste un limite per gli avvicinamenti

dall'alto. Questi due limiti, anche quando entrambi esistono, non devono necessariamente essere identici; e se lo sono, non è detto che siano identici al *valore* dell'argomento *a* . È solo in quest'ultimo caso che diciamo che la funzione è *continua* per l'argomento *a* .

Una funzione si dice “continua” (senza ulteriori specificazioni) quando è continua per ogni argomento.

Un altro metodo leggermente diverso per giungere alla definizione di continuità è il seguente:

Diciamo che una funzione “converge in definitiva in una classe *α* ” se esiste un numero reale tale che, per questo argomento e per tutti gli argomenti maggiori di questo, il valore della funzione appartiene alla classe *α* . Analogamente, diremo che una funzione “converge in *α* quando l'argomento si avvicina *a x* dal basso” se esiste un argomento *y* minore di *x* tale che in tutto l'intervallo da *y* (incluso) a *x* (escluso) la funzione assume valori che appartengono ad *α* . Possiamo ora dire che una funzione è continua per l'argomento *a* , per il quale ha il valore *fa* , se soddisfa quattro condizioni, vale a dire:

(1) Dato un qualsiasi numero reale minore di *fa* , la funzione converge ai successori di questo numero quando l'argomento si avvicina *ad a* dal basso;

(2) Dato un qualsiasi numero reale maggiore di *fa* , la funzione converge ai predecessori di questo numero quando l'argomento si avvicina *ad a* dal basso;

(3) e (4) Condizioni simili per gli approcci ad *a* dall'alto.

Il vantaggio di questa forma di definizione è che analizza le condizioni di continuità suddividendole in quattro categorie, derivanti dalla considerazione di argomenti e valori rispettivamente maggiori o minori rispetto all'argomento e al valore per i quali si deve definire la continuità .

Possiamo ora generalizzare le nostre definizioni in modo da applicarle a serie che non sono numeriche o che non sono note per essere numericamente misurabili. Il caso del moto è un esempio utile da tenere a mente. C'è un racconto di H.G. Wells che illustrerà, a partire dal caso del moto, la differenza tra il limite di una funzione per un dato argomento e il suo valore per lo stesso argomento. L'eroe del racconto, che possedeva, senza saperlo, il potere di realizzare i suoi desideri, veniva attaccato da un poliziotto, ma esclamando "Vai a——" scoprì che il poliziotto scompariva. Se $f(t)$ fosse la posizione del poliziotto al tempo t , e t_0 il momento dell'esclamazione, il limite delle posizioni del poliziotto quando t si avvicinava a t_0 dal basso sarebbe stato a contatto con l'eroe, mentre il valore per l'argomento t_0 era —. Ma si suppone che tali eventi siano rari nel mondo reale, e si assume, sebbene senza prove adeguate, che tutti i moti siano continui, *ovvero* che, dato un corpo qualsiasi, se $f(t)$ è la sua posizione al tempo t , $f(t)$ è una funzione continua di t . È il significato di "continuità" implicato in tali affermazioni che ora desideriamo definire nel modo più semplice possibile.

Le definizioni fornite per il caso di funzioni in cui argomento e valore sono numeri reali possono essere facilmente adattate a un utilizzo più generale.

Siano P e Q due relazioni, che è bene immaginare seriali, sebbene non sia necessario ai fini delle nostre definizioni che lo siano. Sia R una relazione uno-molti il cui dominio è contenuto nel campo di P, mentre il suo dominio inverso è contenuto nel campo di Q. Allora R è (in senso generalizzato) una funzione, i cui argomenti appartengono al campo di Q, mentre i suoi valori appartengono al campo di P. Supponiamo, ad esempio, di avere a che fare con una particella che si muove su una retta: sia Q la serie temporale, P la serie di punti sulla nostra retta da sinistra a destra, R la relazione tra la posizione della nostra particella sulla retta al tempo *a e* al tempo *a'* , in modo che "l'R di *a* " sia la sua posizione al tempo *a'* . Questa illustrazione può essere tenuta presente durante tutte le nostre definizioni.

Diremo che la funzione R è continua per l'argomento | *a*| se , dato un qualsiasi intervallo *α* sull'115

Data una serie P contenente il valore della funzione per l'argomento *a* , esiste un intervallo sulla serie Q contenente *a* non come estremo e tale che, in tutto questo intervallo, la funzione assume valori che appartengono ad *α* . (Per "intervallo" intendiamo tutti i termini compresi tra due qualsiasi; *cioè,* se *x* e *y* sono due elementi del campo P, e *x* ha la relazione P con *y , per "intervallo P da x* a *y* " intendiamo tutti i termini *z* tali che *x* ha la

relazione P con *z* e *z* ha la relazione P con *y* —insieme, quando così specificato, con *x* o *y* stessi.)

Possiamo definire facilmente la “sezione ultima” e l’“oscillazione ultima”. Per definire la “sezione ultima” per gli approcci all’argomento *a* dal basso, prendiamo un qualsiasi argomento *y* che precede *a* (*cioè* ha la relazione Q con *a*), prendiamo i valori della funzione per tutti gli argomenti fino a *y* incluso , e formiamo la sezione di P definita da questi valori, *cioè* quei membri della serie P che sono precedenti o identici ad alcuni di questi valori. Formiamo tutte queste sezioni per tutti *gli y* che precedono *a* , e prendiamo la loro parte comune; questa sarà la sezione ultima. La sezione superiore ultima e l’oscillazione ultima sono quindi definite esattamente come nel caso precedente.

L'adattamento della definizione di convergenza e la conseguente definizione alternativa di continuità non presentano alcuna difficoltà .

Diciamo che una funzione R è “Q-convergente in *α* ” se esiste un elemento *y* del dominio inverso di R e del campo di Q tale che il valore della funzione per l'argomento *y* e per qualsiasi argomento a cui *y* è legato dalla relazione Q appartiene ad *α* . Diciamo che R “Q-converge in *α* quando l'argomento si avvicina a un dato argomento *a* ” se esiste un termine *y* che ha la relazione Q con *a* e appartiene al dominio inverso di R e tale che il valore della funzione per qualsiasi argomento nell'intervallo Q da *y* (incluso) ad *a* (escluso) appartiene ad *α* .

Delle quattro condizioni che una funzione deve soddisfare per essere continua per l'argomento *a* , la prima è, mettendo *b* per il valore dell'argomento *a* : |

Dato un qualsiasi termine avente la relazione P con *b* , R Q- 116 converge nei successori di *b* (rispetto a P) man mano che l'argomento si avvicina *ad a* dal basso. La seconda condizione si ottiene sostituendo P con il suo inverso; la terza e la quarta si ottengono dalla prima e dalla seconda sostituendo Q con il suo inverso.

Non c'è dunque nulla, nelle nozioni di limite di una funzione o di continuità di una funzione, che implichi essenzialmente il numero. Entrambe possono essere definite in generale e molte proposizioni su di esse possono essere dimostrate per qualsiasi coppia di serie (una serie degli argomenti e l'altra serie dei valori). Si vedrà che le definizioni non coinvolgono gli infinitesimi. Coinvolgono classi infinite di intervalli, che diventano sempre più piccoli senza alcun limite inferiore a zero, ma non coinvolgono intervalli che non siano finiti. Questo è analogo al fatto che se una linea lunga un pollice viene dimezzata, poi dimezzata di nuovo, e così via all'infinito, non si raggiungono mai gli infinitesimi in questo modo: dopo *n* bisezioni, la lunghezza del nostro bit è 1 / 2n di ^{pollice} ; e questo è finito qualunque sia il numero finito *n* . Il processo di bisezione successiva non porta a divisioni il cui numero ordinale è infinito, poiché è essenzialmente un processo uno per uno. Pertanto, gli infinitesimi non si raggiungono in questo modo. Le confusioni su tali argomenti sono state in gran parte

dovute alle difficoltà riscontrate nella discussione sull'infinito e sulla continuità.

Capitolo XII Selezioni e assioma moltiplicativo

In questo capitolo dobbiamo considerare un assioma che 117 può essere enunciato, ma non dimostrato, in termini di logica, e che è utile, sebbene non indispensabile, in certe parti della matematica. È utile nel senso che molte proposizioni interessanti, che sembra naturale supporre vere, non possono essere dimostrate senza il suo aiuto; ma non è indispensabile, perché anche senza tali proposizioni i soggetti in cui compaiono esistono comunque, sebbene in una forma alquanto mutilata.

Prima di enunciare l'assioma moltiplicativo, dobbiamo innanzitutto spiegare la teoria delle selezioni e la definizione di moltiplicazione quando il numero dei fattori può essere infinito.

Nella definizione delle operazioni aritmetiche, l'unica procedura corretta è costruire una classe (o relazione, nel caso di numeri-relazione) effettiva avente il numero di termini richiesto. Ciò a volte richiede una certa dose di ingegno, ma è essenziale per dimostrare l'esistenza del numero definito. Prendiamo, come esempio più semplice, il caso dell'addizione. Supponiamo di avere un numero cardinale μ e una classe α che ha μ termini. Come definiremo $\mu + \mu$? A questo scopo dobbiamo avere *due* classi con μ termini, e queste non devono sovrapporsi. Possiamo costruire tali classi a partire da α in vari modi, di cui il seguente è forse il più semplice: formare prima tutte le coppie ordinate il cui primo termine è una classe composta da un singolo elemento di α e il cui secondo termine è la classe nulla; poi, in secondo luogo, formare tutte le coppie ordinate il cui primo termine è la classe

nulla e il cui secondo termine è una classe composta da un singolo elemento di α . Queste due classi di coppie non hanno membri in comune e la somma logica delle due classi avrà $\mu + \mu$ termini. Esattamente in modo analogo possiamo definire $\mu + \nu$, dato che μ è il numero di una certa classe α e ν è il numero di una certa classe β .

Tali definizioni, di norma, sono semplicemente una questione di adozione di un apposito strumento tecnico. Ma nel caso della moltiplicazione, dove il numero dei fattori può essere infinito, dalla definizione emergono problemi importanti.

La moltiplicazione quando il numero di fattori è finito non presenta difficoltà . Date due classi α e β , di cui la prima ha μ termini e la seconda ν termini, possiamo definire $\mu \times \nu$ come il numero di coppie ordinate che possono essere formate scegliendo il primo termine da α e il secondo da β . Si vedrà che questa definizione non richiede che α e β non si sovrappongano; rimane adeguata anche quando α e β sono identiche. Ad esempio, sia α la classe i cui membri sono x_1, x_2, x_3 . Allora la classe che viene utilizzata per definire il prodotto $\mu \times \mu$ è la classe delle coppie:

$(x_1,x_1), (x_1,x_2), (x_1,x_3); (x_2,x_1), (x_2,x_2), (x_2,x_3); (x_3,x_1), (x_3,x_2), (x_3,x_3)$.

Questa definizione rimane valida quando μ o ν o entrambi sono infiniti, e può essere estesa gradualmente a tre, quattro o a qualsiasi numero finito di fattori. Non si presenta alcuna difficoltà

per quanto riguarda questa definizione, se non per il fatto che non può essere estesa a un numero *infinito* di fattori.

Il problema della moltiplicazione quando il numero di fattori può essere infinito si pone in questo modo: supponiamo di avere una classe κ composta da classi; supponiamo che sia dato il numero di termini in ciascuna di queste classi.

Come definiremo il prodotto di tutti questi numeri? Se possiamo formulare la nostra definizione in modo generale, essa sarà applicabile sia che κ sia finito o infinito. Va osservato che il problema è riuscire a gestire il caso in cui κ è infinito, non il caso in cui i suoi elementi lo sono. Se $|\kappa|$ non è infinito, il metodo 119 definito sopra è altrettanto applicabile quando i suoi elementi sono infiniti quanto quando sono finiti. È il caso in cui κ è infinito, anche se i suoi elementi possono essere finiti, che dobbiamo gestire.

Il seguente metodo di definizione generale della moltiplicazione si deve al Dott. Whitehead. Esso è spiegato e trattato in dettaglio nei *Principia Mathematica* , vol. I, $*80$ e segg ., e vol. II, $*114$.

Supponiamo innanzitutto che κ sia una classe di classi, senza sovrapposizioni tra loro – ad esempio, i collegi elettorali di un paese in cui non esiste il voto plurale, considerando ciascun collegio come una classe di elettori. Proviamo ora a scegliere un *rappresentante* da ciascuna classe , come fanno i collegi elettorali quando eleggono i membri del Parlamento, supponendo che per legge ogni collegio debba eleggere un uomo che sia

elettore in quel collegio. Arriviamo così a una classe di rappresentanti, che compongono il nostro Parlamento, uno per ogni collegio. Quanti modi diversi ci sono per scegliere un Parlamento? Ogni collegio può scegliere uno qualsiasi dei suoi elettori e, pertanto, se ci sono μ elettori in un collegio, esso può fare μ scelte. Le scelte dei diversi collegi sono indipendenti; È quindi ovvio che, quando il numero totale di collegi elettorali è finito, il numero di parlamenti possibili si ottiene moltiplicando tra loro il numero di elettori nei vari collegi. Quando non sappiamo se il numero di collegi elettorali è finito o infinito, possiamo considerare il numero di parlamenti possibili come il *prodotto* del numero di elettori nei singoli collegi. Questo è il metodo con cui si definiscono i prodotti infiniti. Dobbiamo ora abbandonare l'esempio e procedere con formulazioni precise.

Sia κ una classe di classi, e supponiamo per cominciare che nessun membro di κ si sovrapponga a un altro, *cioè* che se α e β sono due membri diversi di κ , allora nessun membro dell'uno è membro dell'altro. Chiameremo una classe una "selezione" da κ quando è costituita da un solo termine per ogni membro di κ ; *cioè* μ è una "selezione" da κ se ogni membro di μ appartiene a qualche membro di κ , e se α è un qualsiasi membro 120 di κ , μ e α hanno esattamente un termine in comune.

La classe di tutte le “selezioni” da κ verrà chiamata “classe moltiplicativa” di κ . Il numero di termini nella classe moltiplicativa di κ , *ovvero* il numero di possibili selezioni da κ , è

definito come il prodotto del numero di elementi di κ . Questa definizione è ugualmente valida sia per κ finito che per κ infinito.

Prima di poter essere completamente soddisfatti di queste definizioni, dobbiamo rimuovere la restrizione che nessun membro di κ si sovrapponga a un altro. A tal fine, invece di definire prima una classe chiamata "selezione", definiremo prima una relazione che chiameremo "selettore". Una relazione R sarà detta "selettore" da κ se, da ogni membro di κ , seleziona un termine come rappresentante di quel membro, *ovvero* se, dato un qualsiasi membro α di κ , esiste un solo termine x che è membro di α e ha la relazione R con α ; e questo sarà tutto ciò che R fa. La definizione formale è:

Un “selettore” da una classe di classi κ è una relazione uno-a-molti, avente κ come dominio inverso, e tale che, se x ha la relazione con α , allora x è un membro di α .

Se R è un selettore da κ , e α è un elemento di κ , e x è il termine che ha la relazione R con α , diciamo x il "rappresentante" di α rispetto alla relazione R.

Una “selezione” da κ sarà ora definita come il dominio di un selettore; e la classe moltiplicativa, come prima, sarà la classe delle selezioni.

Ma quando i membri di κ si sovrappongono, possono esserci più selettori che selezioni, poiché un termine x che appartiene a due classi α e β può essere selezionato una volta per rappresentare α e una volta per rappresentare β , dando origine a selettori diversi

nei due casi, ma alla stessa selezione. Ai fini della definizione della moltiplicazione, sono i selettori che ci servono, piuttosto che le selezioni. Pertanto definiamo:

"Il prodotto del numero di membri di una classe di classi κ " è il numero di selettori di κ .

Possiamo definire l'elevamento a potenza mediante un adattamento del piano di cui sopra . Potremmo, naturalmente, definire 121 μ^{ν} come il numero di selettori da ν classi, ciascuna delle quali ha μ termini. Ma ci sono obiezioni a questa definizione, derivanti dal fatto che l'assioma moltiplicativo (di cui parleremo a breve) è inutilmente coinvolto se viene adottato. Adottiamo invece la seguente costruzione:

Sia α una classe con μ termini e β una classe con ν termini. Sia y un elemento di β e formiamo la classe di tutte le coppie ordinate che hanno y come secondo termine e un elemento di α come primo termine. Ci saranno μ coppie di questo tipo per un dato y , poiché qualsiasi elemento di α può essere scelto come primo termine e α ha μ elementi. Se ora formiamo tutte le classi di questo tipo che risultano dalla variazione *di* y , otteniamo in totale ν classi, poiché y può essere un qualsiasi elemento di β e β ha ν elementi. Queste ν classi sono ciascuna una classe di coppie, ovvero tutte le coppie che possono essere formate da un elemento variabile di α e un elemento fisso di β . Definiamo $\mu\nu$ *come il numero di* ^{selettori} dalla classe costituita da queste ν classi. Oppure possiamo definire μ^{ν} come il numero di selezioni, poiché, dato che le nostre classi di coppie sono mutuamente esclusive, il

numero di selettori è uguale al numero di selezioni. Una selezione dalla nostra classe di classi sarà un insieme di coppie ordinate, di cui ce ne sarà esattamente una avente un qualsiasi elemento di β come secondo termine, e il primo termine può essere un qualsiasi elemento di α . Quindi μ^{ν} è definito dai selettori di un certo insieme di ν classi ciascuna avente μ termini, ma l'insieme ha una certa struttura e una composizione più gestibile rispetto al caso generale. La rilevanza di ciò per l'assioma moltiplicativo apparirà a breve.

Ciò che si applica all'elevamento a potenza si applica anche al prodotto di due cardinali. Potremmo definire " $\mu \times \nu$ " come la somma del numero di classi ν ciascuna avente μ termini, ma preferiamo definirlo come il numero di coppie ordinate da formare costituite da un membro di α seguito da un membro di β , dove α ha μ termini e β ha ν termini . Anche questa definizione è pensata per evitare la necessità di presupporre l'assioma moltiplicativo.

Con le nostre definizioni, possiamo dimostrare le usuali leggi formali di moltiplicazione ed elevamento a potenza. Ma c'è una cosa che non possiamo dimostrare: non possiamo dimostrare che un prodotto è zero solo quando uno dei suoi fattori è zero. Possiamo dimostrarlo quando il numero di fattori è finito, ma non quando è infinito. In altre parole, non possiamo dimostrare che, data una classe di classi nessuna delle quali è nulla, debbano esistere selettori da esse; o che, data una classe di classi mutuamente esclusive, debba esistere almeno una classe composta da un termine di ciascuna delle classi date. Queste

cose non possono essere dimostrate; e sebbene, a prima vista, sembrino ovviamente vere, tuttavia la riflessione porta gradualmente a dubbi crescenti, finché alla fine ci accontentiamo di registrare l'assunto e le sue conseguenze, come registriamo l'assioma dei parallelismi, senza presumere di poter sapere se sia vero o falso. L'assunto, formulato in modo approssimativo, è che selettori e selezioni esistano quando dovremmo aspettarceli. Ci sono molti modi equivalenti per affermarlo con precisione. Possiamo iniziare con il seguente:

"Data una qualsiasi classe di classi mutuamente esclusive, di cui nessuna è nulla, esiste almeno una classe che ha esattamente un termine in comune con ciascuna delle classi date."

Questa proposizione la chiameremo "assioma moltiplicativo". [24] Daremo prima varie forme equivalenti della proposizione, e poi considereremo alcuni modi in cui la sua verità o falsità è di interesse per la matematica.

L'assioma moltiplicativo è equivalente alla proposizione secondo cui un prodotto è zero solo quando almeno uno dei suoi fattori è zero; *cioè* , se si moltiplicano tra loro un numero qualsiasi di numeri cardinali, il risultato non può essere 0 a meno che uno dei numeri in questione non sia zero.

0 .

L'assioma moltiplicativo è equivalente alla proposizione secondo cui, se R è una relazione qualsiasi e κ una classe qualsiasi

contenuta nel dominio inverso di R, allora esiste almeno una relazione uno-molti che implica R e ha κ come dominio inverso.

L'assioma moltiplicativo è equivalente all'assunzione che se α è una qualsiasi classe e κ tutte le sottoclassi di α con l'eccezione | della classe nulla, 123 allora esiste almeno un selettore da κ . Questa è la forma in cui l'assioma è stato portato per la prima volta al no-

assioma del mondo colto da Zermelo, nel suo “Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.” [25] Zermelo considera l’assioma una verità indiscutibile. Bisogna ammettere che, fino a quando non lo rese esplicito, i matematici lo avevano usato senza remore; ma sembrerebbe che lo avessero fatto inconsciamente. E il merito dovuto a Zermelo per averlo reso esplicito è del tutto indipendente dalla questione se sia vero o falso.

Zermelo ha dimostrato, nella dimostrazione sopra menzionata, che l'assioma moltiplicativo è equivalente alla proposizione secondo cui ogni classe può essere ben ordinata, *ovvero* può essere disposta in una serie in cui ogni sottoclasse ha un primo termine (tranne, ovviamente, la classe nulla). La dimostrazione completa di questa proposizione è difficile , ma non è difficile comprenderne il principio generale su cui si basa. Essa utilizza la forma che chiamiamo "assioma di Zermelo", *ovvero* presuppone che, data una qualsiasi classe α , esista almeno una relazione uno-molti R il cui dominio inverso è costituito da tutte le sottoclassi esistenti di α e che sia tale che, se x ha la relazione R con ξ , allora x è un membro di ξ . Tale relazione seleziona un

"rappresentante" da ogni sottoclasse; naturalmente, accadrà spesso che due sottoclassi abbiano lo stesso rappresentante. In effetti, ciò che fa Zermelo è contare gli elementi di *α* , uno per uno, per mezzo di R e dell'induzione transfinita. Prendiamo prima il rappresentante di *α* ; chiamiamolo x_1 . Poi prendiamo il rappresentante della classe costituita da tutti gli elementi di α tranne x_1 *;* chiamiamolo x_2 . *Deve* essere diverso da x_1 , perché ogni rappresentante è un membro della sua classe, e x_1 è escluso da questa classe. Procediamo in modo simile per rimuovere x_2 , e sia x_3 *il* rappresentante *di* ciò che rimane. In questo modo otteniamo prima una progressione x_1 , x_2 , ... xn *, ..., supponendo che α non sia finito. Quindi rimuoviamo l'intera progressione; sia xω il* *rappresentante* di ciò *che* rimane *di* α . In questo modo possiamo continuare finché non rimane più nulla . I rappresentanti successivi formeranno una serie ben ordinata contenente tutti gli elementi di 124 *α* . (Quanto sopra è, ovviamente, solo un accenno alle linee generali della dimostrazione.) Questa proposizione è chiamata "teorema di Zermelo".

L'assioma moltiplicativo equivale anche all'assunzione che, tra due cardinali diversi, uno dei due debba essere maggiore. Se l'assioma è falso, esisteranno cardinali *μ* e *v* tali che *μ* non sia né minore, né uguale, né maggiore di v. Abbiamo visto che $\aleph_1$ e $\aleph_0$ *potrebbero* costituire un esempio di tale coppia .

Si potrebbero presentare molte altre forme dell'assioma, ma quelle sopra elencate sono le più importanti tra quelle attualmente conosciute. Quanto alla verità o alla falsità

dell'assioma in una qualsiasi delle sue forme, al momento non si sa nulla.

Le proposizioni che dipendono dall'assioma, pur non essendone nota l'equivalenza, sono numerose e importanti. Prendiamo innanzitutto la connessione tra addizione e moltiplicazione. Pensiamo naturalmente che la somma di v classi mutuamente esclusive, ciascuna con μ termini, debba avere $\mu \times v$ termini. Quando v è finito, questo può essere dimostrato. Ma quando v è infinito, non può essere dimostrato senza l'assioma moltiplicativo, tranne nei casi in cui, a causa di qualche circostanza particolare, si possa dimostrare l'esistenza di certi selettori. L'assioma moltiplicativo entra in gioco nel seguente modo: supponiamo di avere due insiemi di v classi mutuamente esclusive, ciascuna con μ termini, e di voler dimostrare che la somma di un insieme ha tanti termini quanti la somma dell'altro. Per dimostrarlo, dobbiamo stabilire una corrispondenza biunivoca. Ora, poiché in ogni caso ci sono v classi, esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di classi; ma ciò che vogliamo è una corrispondenza biunivoca tra i loro termini. Consideriamo una relazione biunivoca S tra le classi. Se κ e λ sono i due insiemi di classi e α è un elemento di κ , esisterà un elemento β di λ che sarà il correlato di α rispetto a S. Ora, α e β hanno entrambi μ termini e sono quindi simili. Di conseguenza, esistono correlazioni biunivoche tra α e β . Il problema è che ce ne sono troppe. Per ottenere una correlazione biunivoca tra la somma di κ e la somma di λ , dobbiamo selezionare *un* correlatore di α con β , e analogamente per ogni altra coppia. Ciò richiede una *selezione* da

un insieme di classi | di 125 correlatori, una classe dell'insieme essendo costituita da tutti i correlatori biunivoci di α con β . Se κ e λ sono infiniti, in generale non possiamo sapere che una tale selezione esiste, a meno che non possiamo sapere che l'assioma moltiplicativo è vero. Pertanto non possiamo stabilire il solito tipo di connessione tra addizione e moltiplicazione.

Questo fatto ha diverse curiose conseguenze. Innanzitutto, sappiamo che $\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Da ciò si deduce comunemente che la somma di $\aleph_0$ classi , ciascuna avente $\aleph_0$ elementi , deve a sua volta avere $\aleph_0$ elementi , ma questa inferenza è fallace, poiché non sappiamo che il numero di termini in tale somma sia $\aleph_0 \times \aleph_0$, né di conseguenza che sia $\aleph_0$. Ciò ha un impatto sulla teoria degli ordinali transfiniti. È facile dimostrare che un ordinale che ha $\aleph_0$ predecessori deve appartenere a quella che Cantor chiama la "seconda classe", ovvero tale che *una* serie avente questo numero ordinale avrà $\aleph_0$ termini nel suo campo. È inoltre facile vedere che, se prendiamo una qualsiasi progressione di ordinali della seconda classe, i predecessori del loro limite formano al massimo la somma di $\aleph_0$ classi, ciascuna avente $\aleph_0$ termini . Da ciò si deduce —fallimentaremente, a meno che l'assioma moltiplicativo non sia vero — che i predecessori del limite sono $\aleph_0$ in numero, e quindi che il limite è un numero della "seconda classe ". Vale a dire, si suppone di dover dimostrare che qualsiasi progressione di ordinali della seconda classe ha un limite che è a sua volta un ordinale della seconda classe. Questa proposizione, con il corollario che ω_1 *(il più* piccolo ordinale della terza classe) non è il limite di alcuna progressione, è coinvolta nella maggior parte

della teoria riconosciuta degli ordinali della seconda classe. In considerazione del modo in cui è coinvolto l'assioma moltiplicativo, la proposizione e il suo corollario non possono essere considerati dimostrati. Possono essere veri, oppure no. Al momento si può solo affermare che non lo sappiamo. Pertanto, la maggior parte della teoria degli ordinali di seconda classe deve essere considerata non dimostrata.

Un altro esempio può aiutare a chiarire il punto. Sappiamo che $^{2} \times \aleph_0 = \aleph_0$. Quindi potremmo supporre che la somma di $\aleph_0$ $^{\text{coppie debba avere}}$ $\aleph_0$ termini . Ma questo, sebbene possiamo dimostrare che a volte accade, non può essere dimostrato che accada *sempre* , a meno che non si assuma l'assioma moltiplicativo. Questo 126 è illustrato dal milionario che comprava un paio di calzini ogni volta che comprava un paio di stivali, e mai in altre occasioni, e che aveva una tale passione per entrambi che alla fine aveva $\aleph_0$ paia di stivali e $\aleph_0$ paia di calzini. Il problema è: quanti stivali aveva e quanti calzini? Si supporrebbe naturalmente che avesse il doppio degli stivali e il doppio dei calzini rispetto al numero di paia di ciascuno, e che quindi avesse $\aleph_0$ di ciascuno, poiché tale numero non aumenta raddoppiando. Questo è un esempio della difficoltà , già notata, di collegare la somma di v classi, ciascuna con μ termini, con $\mu \times v$. A volte è possibile, a volte no. Nel nostro caso è possibile farlo con gli stivali, ma non con i calzini, se non con qualche stratagemma molto artificioso. La ragione della differenza è questa: tra gli stivali possiamo distinguere il destro e il sinistro, e quindi possiamo selezionarne uno da ogni coppia, ovvero possiamo scegliere tutti gli stivali destri o tutti gli stivali

sinistri; ma con i calzini non si presenta un principio di selezione simile, e non possiamo essere certi, a meno che non si assuma l'assioma moltiplicativo, che esista una classe composta da un solo calzino per ogni coppia.

Ecco il problema.

Possiamo porre la questione in un altro modo. Per dimostrare che una classe ha $\aleph_0$ termini , è necessario e sufficiente trovare un modo per disporre i suoi termini in una progressione. Non c'è difficoltà a farlo con gli stivali. Le *coppie* sono date come formanti un $\aleph_0$, e quindi come il campo di una progressione. All'interno di ogni coppia, prendiamo prima lo stivale sinistro e poi quello destro, mantenendo invariato l'ordine della coppia; in questo modo otteniamo una progressione di tutti gli stivali. Ma con i calzini dovremo scegliere arbitrariamente, per ogni coppia, quale mettere per primo; e un numero infinito di scelte arbitrarie è impossibile. A meno che non riusciamo a trovare una *regola* di selezione, *cioè* una relazione che sia un selettore, non sappiamo se una selezione sia teoricamente possibile. Naturalmente, nel caso di oggetti nello spazio, come i calzini, possiamo sempre trovare qualche principio di selezione. Ad esempio, prendiamo i centri di massa dei calzini: ci saranno punti *p* nello spazio tali che, con qualsiasi | In una coppia di calzini, i centri di massa dei due calzini non si trovano entrambi esattamente alla stessa distanza da *p* ; quindi possiamo scegliere, da ogni coppia, il calzino che ha il centro di massa più vicino a *p* . Ma non c'è alcuna ragione teorica per cui un metodo di selezione come questo dovrebbe

essere sempre possibile, e il caso dei calzini, con un po' di buona volontà da parte del lettore, può servire a mostrare come una selezione potrebbe essere impossibile.

Si noti che, se *fosse* impossibile selezionarne uno da ogni paio di calzini, ne conseguirebbe che i calzini non *potrebbero* essere disposti in progressione, e quindi che non ce ne sarebbero $\aleph_0$. Questo caso illustra che, se μ è un numero infinito, un insieme di μ *coppie* potrebbe non contenere lo stesso numero di elementi di un altro insieme di μ coppie; infatti, dati $\aleph_0$ paia di stivali, ci sono certamente $\aleph_0$ stivali , ma non possiamo esserne certi nel caso dei calzini a meno che non si assuma l'assioma moltiplicativo o si ricorra a qualche fortuito metodo di selezione geometrico come quello sopra descritto.

Un altro problema importante che coinvolge l'assioma moltiplicativo è la relazione tra riflessività e non induttività. Si ricorderà che nel Capitolo VIII abbiamo sottolineato che un numero riflessivo deve essere non induttivo, ma che il viceversa (per quanto ne sappiamo attualmente) può essere dimostrato solo se assumiamo l'assioma moltiplicativo. Il modo in cui ciò si ottiene è il seguente:

È facile dimostrare che una classe riflessiva è una classe che contiene sottoclassi con $\aleph_0$ termini. (La classe stessa può, ovviamente, avere $\aleph_0$ termini .) Dobbiamo quindi dimostrare, se possibile, che, data una qualsiasi classe non induttiva, è possibile scegliere una progressione dai suoi termini. Ora non c'è difficoltà nel dimostrare che una classe non induttiva deve contenere più

termini di qualsiasi classe induttiva, o, il che equivale alla stessa cosa, che se α è una classe non induttiva e v è un qualsiasi numero induttivo, esistono sottoclassi di α che hanno v termini. Possiamo quindi formare insiemi di sottoclassi finite di α : prima una classe senza termini, poi classi con 1 termine (tante quanti sono gli elementi di α), poi classi con 12 termini, e così via fino a 128 . Otteniamo quindi una progressione di insiemi di sottoclassi, ciascun insieme costituito da tutte quelle che hanno un certo numero finito di termini. Finora non abbiamo usato l'assioma moltiplicativo, ma abbiamo solo dimostrato che il numero di collezioni di sottoclassi di α è un numero riflessivo, *cio*è che, se μ è il numero di elementi di α , in modo che 2^{μ} sia il numero di sottoclassi di α e $2^{2^{\mu}}$ sia il numero di collezioni di sottoclassi, allora, a condizione che μ non sia induttivo, $2^{2^{\mu}}$ deve essere riflessivo. Ma questo è ben lontano da ciò che ci eravamo prefissati di dimostrare.

Per progredire oltre questo punto, dobbiamo impiegare l'assioma moltiplicativo. Da ogni insieme di sottoclassi scegliamone una, omettendo la sottoclasse costituita dalla sola classe nulla. Vale a dire, selezioniamo una sottoclasse contenente un termine, α_1 , per esempio; una contenente due termini, α_2 , per esempio; una contenente tre termini, α_3 , per esempio; e così via. (Possiamo farlo se si assume l'assioma moltiplicativo; altrimenti, non sappiamo se possiamo sempre farlo o meno.) Ora abbiamo una progressione $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots$ di sottoclassi di α , invece di una progressione di collezioni di sottoclassi; in questo modo siamo un passo più vicini al nostro obiettivo. Sappiamo ora che, assumendo

l'assioma moltiplicativo, se $^{\mu}$ è un numero non induttivo, ∂μ deve essere un numero riflessivo.

Il passo successivo consiste nel notare che, sebbene non possiamo essere certi che nuovi membri di α entrino in una specifica fase della progressione $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ possiamo essere certi che nuovi membri continuano ad entrare di tanto in tanto. Illustriamo questo concetto. La classe α_1 , composta da un solo termine, rappresenta un nuovo inizio; sia x_1 il termine in questione . La classe α_2 , composta da due termini, può contenere o meno x_1 ; se lo contiene, introduce un nuovo termine; se non lo contiene, deve introdurre due nuovi termini, diciamo x_2 , x_3 . In questo caso è possibile che α_3 corrisponda a x_1, x_2, x_3, e quindi non introduca nuovi termini, ma in tal caso α_4 deve introdurre un nuovo termine. Le prime v classi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_v$ contengono, al massimo, 1 + 2 + 3 + ... + v termini, *ovvero* $v (v + 1) / 2$ termini; quindi sarebbe possibile, se non ci fossero ripetizioni nelle prime v classi, continuare con sole ripetizioni dalla (v + 1) 129 ^{alla} v $(v + 1) / 2$ classe . Ma a quel punto i vecchi termini non sarebbero più sufficientemente numerosi per formare una classe successiva con il numero corretto di membri, $^{ovvero} v (v + 1) / 2 + 1$, quindi nuovi termini devono entrare in gioco a questo punto, se non prima . Ne consegue che, se omettiamo dalla nostra progressione $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ tutte quelle classi composte interamente da elementi già presenti nelle classi precedenti, avremo comunque una progressione. Chiamiamo la nostra nuova progressione $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$(Avremo $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$, perché α_1 e α_2 *devono* introdurre nuovi termini. Potremmo avere o meno $\alpha_3 = \beta_3$, ma,

parlando in generale, β_μ sarà α_ν , dove *v* è un numero maggiore di μ ; *cioè* i β sono *alcuni* degli α .) Ora questi β sono tali che uno qualsiasi di essi, diciamo β_μ *, contiene elementi che non sono comparsi in nessuno dei* β precedenti . Sia γ_μ la parte di β_μ che consiste di nuovi elementi. Otteniamo quindi una nuova progressione $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ (Di nuovo γ_1 *sarà* identico a_{β_1} *e* ad α_1 ; *se* α_2 non *contiene* l' unico *elemento* di α_1 , *avremo* $\gamma_2 = \beta_2 = \alpha_2$, ma se α_2 contiene questo unico elemento, γ_2 sarà costituito dall'altro elemento di α_2 *)* . Questa nuova progressione di *γ è costituita da classi mutuamente esclusive.* Quindi una selezione *da* esse sarà una progressione; cioè *se* x_1 è un elemento di γ_1 , x_2 è un elemento di γ_2 , x_3 è *un* elemento di γ_3 , e così *via* ; allora x_1 , x_2 , x_3 , ... è una progressione ed è una sottoclasse di *α*Supponendo l'assioma moltiplicativo, tale selezione può essere effettuata. Pertanto, utilizzando due volte questo assioma, possiamo dimostrare che, se l'assioma è vero, ogni cardinale non induttivo deve essere riflessivo. Ciò potrebbe anche essere dedotto dal teorema di Zermelo, secondo il quale, se l'assioma è vero, ogni classe può essere ben ordinata; infatti una serie ben ordinata deve avere un numero finito o riflessivo di termini nel suo campo.

C'è un vantaggio nell'argomentazione diretta di cui sopra, rispetto alla deduzione dal teorema di Zermelo, che l'argomentazione di cui sopra non richiede la verità universale dell'assioma moltiplicativo, ma solo la sua verità come applicata a un insieme di $\aleph_0$ classi. Può accadere che l'assioma valga per $\aleph_0$ classi, ma non per un numero maggiore di classi. Per questo motivo è meglio, quando | è possibile, accontentarci dell'ipotesi più

ristretta 130. L'ipotesi fatta nell'argomentazione diretta di cui sopra è che un prodotto di ℵ 0 fattori non è mai zero a meno che uno dei fattori non sia zero. Possiamo enunciare questa ipotesi nella forma: " ℵ 0 è un numero *moltiplicabile ", dove un numero v* è definito "moltiplicabile" quando un prodotto di *v* fattori non è mai zero a meno che uno dei fattori non sia zero. Possiamo *dimostrare* che un numero *finito* è sempre moltiplicabile-

è possibile, ma non possiamo dimostrare che ogni numero infinito lo sia. L'assioma moltiplicativo è equivalente all'ipotesi che *tutti* i numeri cardinali siano moltiplicabili. Ma per identificare il riflessivo con il non induttivo, o per affrontare il problema degli stivali e dei calzini, o per dimostrare che qualsiasi progressione di numeri della seconda classe è della seconda classe, abbiamo solo bisogno dell'ipotesi molto più semplice che ℵ 0 sia moltiplicabile.

Non è improbabile che ci sia molto da scoprire riguardo agli argomenti trattati in questo capitolo. Si potrebbero trovare casi in cui proposizioni che sembrano implicare l'assioma moltiplicativo possono essere dimostrate senza di esso. È concepibile che l'assioma moltiplicativo nella sua forma generale possa essere dimostrato falso. Da questo punto di vista, il teorema di Zermelo offre la migliore speranza: *si potrebbe* dimostrare che il continuo, o qualche serie ancora più densa, non è in grado di avere i suoi termini ben ordinati, il che dimostrerebbe la falsità dell'assioma moltiplicativo, in virtù del teorema di Zermelo. Ma finora non è

stato scoperto alcun metodo per ottenere tali risultati e l'argomento rimane avvolto nell'oscurità.

Capitolo XIII L'assioma dell'infinito e i tipi logici

L' assioma dell'infinito è un'assunzione che può essere enunciata come segue:

“Se *n* è un qualsiasi numero cardinale induttivo, esiste almeno una classe di individui con *n* termini.”

Se ciò è vero, ne consegue, ovviamente, che esistono molte classi di individui con *n* termini e che il numero totale di individui nel mondo non è un numero induttivo. Infatti, per l'assioma, esiste almeno una classe con *n* + 1 termini, da cui segue che esistono molte classi con *n* termini e che *n* non è il numero di individui nel mondo. Poiché *n* è *un qualsiasi* numero induttivo, ne consegue che il numero di individui nel mondo deve (se il nostro assioma è vero) superare qualsiasi numero induttivo. Alla luce di quanto abbiamo trovato nel capitolo precedente, riguardo alla possibilità di cardinali che non siano né induttivi né riflessivi, non possiamo dedurre dal nostro assioma che ci siano almeno $\aleph_0$ individui, a meno che non si assuma l' assioma moltiplicativo. Sappiamo però che esistono almeno $\aleph_0$ classi di classi, poiché i cardinali induttivi sono classi di classi e formano una progressione se il nostro assioma è vero .

Il modo in cui sorge la necessità di questo assioma può essere spiegato come segue. Uno dei presupposti di Peano è che nessun cardinale induttivo abbia lo stesso successore di un altro, *ovvero* che non si avrà $m + 1 = n + 1$ a meno che $m = n$, se *m* e *n* sono cardinali induttivi. Nel Capitolo VIII abbiamo avuto occasione di

usare un presupposto praticamente identico a quello di Peano, ovvero che, se *n* è un cardinale induttivo, | *n*| non è uguale a *n* + 1. Si potrebbe pensare che ciò sia dimostrabile. Possiamo dimostrare che, se *α* è una classe induttiva e *n* è il numero di elementi di *α* , allora *n* non è uguale a *n* + 1. Questa proposizione è facilmente dimostrabile per induzione e si potrebbe pensare che implichi l'altra. Ma in realtà non è così, poiché potrebbe non esistere una tale classe *α* . Ciò implica questo: se *n* è un cardinale induttivo tale che esiste almeno una classe avente *n* membri, allora *n* non è uguale a *n* + 1. L'assioma dell'infinito ci assicura (veramente o falsamente) che esistono classi aventi *n* membri, e quindi ci permette di affermare che *n* non è uguale a

n + 1. Ma senza questo assioma ci resterebbe la possibilità che *sia n* che *n* + 1 possano appartenere alla classe nulla.

Illustriamo questa possibilità con un esempio: supponiamo che ci siano esattamente nove individui al mondo. (Per quanto riguarda il significato della parola "individuo", chiedo al lettore di avere pazienza.) Allora i cardinali induttivi da 0 a 9 sarebbero quelli che ci aspettiamo, ma 10 (definita come 9 + 1) sarebbe la classe nulla. Si ricorderà che *n* + 1 può essere definita come segue: *n* + 1 è l'insieme di tutte quelle classi che hanno un termine *x* tale che, quando *x* viene rimosso, rimane una classe di *n* termini. Ora, applicando questa definizione, vediamo che, nel caso supposto, 9 + 1 è una classe composta da nessuna classe, *cioè* è la classe nulla. Lo stesso varrà per 9 + 2 , o in generale per 9 + *n* , a meno che *n* non sia zero. Pertanto 10 e tutti i cardinali induttivi

successivi saranno identici, poiché saranno tutti la classe nulla. In tal caso i cardinali induttivi non formeranno una progressione, né sarà vero che non ci sono due successori uguali, poiché sia 9 che 10 saranno seguiti dalla classe nulla (essendo 10 stessa la classe nulla). È per prevenire tali catastrofi aritmetiche che abbiamo bisogno dell'assioma dell'infinito.

In realtà, finché ci accontentiamo dell'aritmetica degli interi finiti e non introduciamo né interi infiniti, né classi o serie infinite di interi finiti o rapporti, è possibile ottenere tutti i risultati desiderati senza l'assioma dell'infinito. Vale a dire, possiamo occuparci dell'addizione, della moltiplicazione e dell'elevamento a potenza di interi finiti e di rapporti, ma non possiamo occuparci di interi infiniti o di irrazionali. Pertanto, la teoria del transfinito e la teoria dei numeri reali non ci sono d'aiuto. Bisogna ora spiegare come si giunge a questi diversi risultati.

Supponendo che il numero di individui nel mondo sia *n* , il numero di classi di individui sarà 2n · Questo in virtù della proposizione generale menzionata nel Capitolo VIII, secondo cui il numero di classi contenute in una classe che ha *n membri è 2n. Ora, 2n è sempre* maggiore di n . Quindi *il* numero di classi nel mondo è maggiore del numero di individui. Se ora supponiamo che il numero di individui sia 9 , come abbiamo fatto poco fa, il numero di classi sarà 29 , *cioè* 512. Pertanto · se consideriamo i nostri numeri come applicati al conteggio delle classi invece che al conteggio degli individui, la nostra aritmetica sarà normale fino a raggiungere 512 : il primo numero a essere nullo sarà 513 . E se

passiamo alle classi delle classi faremo ancora meglio: il loro numero sarà 2512 , un numero così grande da sbalordire l'immaginazione, poiché ha circa 153 cifre. E se passiamo alle classi delle classi delle classi, otterremo un numero rappresentato da ^{2} elevato a una potenza che ha circa 153 cifre; il numero di cifre in questo numero sarà circa tre volte 10152. In un periodo di scarsità ^{di} carta non è desiderabile scrivere questo numero, e se vogliamo numeri più grandi possiamo ottenerli viaggiando ulteriormente lungo la gerarchia logica. In questo modo qualsiasi cardinale induttivo assegnato può essere fatto trovare il suo posto tra i numeri che non sono nulli, semplicemente viaggiando lungo la gerarchia per una distanza sufficiente . [1]

Per quanto riguarda i rapporti, abbiamo uno stato molto simile di aff airs. Se un rapporto *μ/v* deve avere le proprietà attese, ci devono essere abbastanza oggetti di qualsiasi tipo che vengono contati per garantire che la classe nulla non si intrometta improvvisamente. Ma questo può essere garantito, per qualsiasi rapporto *μ/v* dato , senza l'assioma di | infinito, semplicemente viaggiando lungo la gerarchia di una distanza sufficiente . Se non riusciamo a contare gli individui, possiamo provare a contare le classi di individui.

---

1 Su questo argomento si veda *Principia Mathematica* , vol. ii. ∗120 e segg . Sui problemi corrispondenti relativi ai rapporti, si veda *ibid* ., vol. iii. ∗303 e segg .

individui; se ancora non riusciamo, possiamo provare classi di classi, e così via. In definitiva, per quanto pochi individui possano esserci al mondo, raggiungeremo uno stadio in cui ci sono molti più di μ oggetti, qualunque sia il numero induttivo μ . Anche se non ci fossero affatto individui, ciò sarebbe comunque vero, perché ci sarebbe allora una classe, vale a dire la classe nulla, 2 classi di classi (vale a dire la classe nulla di classi e la classe il cui unico membro è la classe nulla di individui), 4 classi di classi di classi, 16 allo stadio successivo, 65 , 536 allo stadio successivo, e così via. Pertanto non è necessario alcun presupposto come l'assioma dell'infinito per raggiungere un dato rapporto o un dato cardinale induttivo.

L'assioma si rende necessario quando si desidera trattare l'intera classe o serie di cardinali induttivi o di rapporti. Abbiamo bisogno dell'intera classe di cardinali induttivi per stabilire l'esistenza di $\aleph_0$, e dell'intera serie per stabilire l'esistenza di progressioni: per questi risultati, è necessario poter costruire un'unica classe o serie in cui nessun cardinale induttivo sia nullo. Abbiamo bisogno dell'intera serie di rapporti in ordine di grandezza per definire i numeri reali come segmenti: questa definizione non darà il risultato desiderato a meno che la serie di rapporti non sia compatta, cosa che non può essere se il numero totale di rapporti, allo stadio considerato, è finito.

Sarebbe naturale supporre – come supposi io stesso in passato – che, mediante costruzioni come quelle che abbiamo considerato, si potrebbe *dimostrare* l'assioma dell'infinito . Si potrebbe dire:

supponiamo che il numero di individui sia *n* , dove *n* può essere 0 senza compromettere il nostro ragionamento; allora, se formiamo l'insieme completo di individui, classi, classi di classi, ecc., tutti insieme, il numero di termini nel nostro intero insieme sarà

$n + 2^n + 2^{2^n}$ *... ad inf.,*

che è $\aleph_0$. Quindi, prendendo insieme tutti i tipi di oggetti, e non limitandoci a oggetti di un solo tipo, otterremo certamente una classe infinita, e quindi non avremo bisogno dell'assioma dell'infinito. Così si potrebbe dire.

Ora, prima di addentrarci in questa argomentazione, la prima cosa da notare è che ha un che di magico: ricorda il prestigiatore che tira fuori le cose dal cappello. L'uomo che ha prestato il suo cappello è abbastanza sicuro che prima non ci fosse un coniglio vivo dentro, ma non sa spiegare come ci sia finito. Quindi il lettore, se ha un solido senso della realtà, si convincerà che è impossibile creare una collezione infinita a partire da una collezione finita di individui, anche se potrebbe non essere in grado di individuare l'errore nella costruzione di cui sopra. Sarebbe un errore dare troppa importanza a queste sensazioni di magia; come altre emozioni, possono facilmente trarci in inganno. Ma offrono un motivo *prima facie* per esaminare molto attentamente qualsiasi argomentazione che le susciti. E quando l'argomentazione di cui sopra verrà esaminata, a mio parere, si scoprirà che è fallace, sebbene la fallacia sia sottile e tutt'altro che facile da evitare in modo coerente.

La fallacia in questione è quella che potremmo definire "confusione di tipi". Spiegare a fondo l'argomento dei "tipi" richiederebbe un intero volume; inoltre, lo scopo di questo libro è di evitare le parti dell'argomento ancora oscure e controverse, isolando, per comodità dei principianti, quelle parti che possono essere accettate come espressione di verità matematicamente accertate. Ora, la teoria dei tipi non appartiene certamente alla parte compiuta e certa del nostro argomento: gran parte di questa teoria è ancora embrionale, confusa e oscura. Ma la necessità di *una qualche* dottrina dei tipi è meno dubbia della forma precisa che tale dottrina dovrebbe assumere; e in relazione all'assioma dell'infinito è particolarmente facile comprenderne la necessità.

Questa necessità deriva, ad esempio, dalla “contraddizione del più grande cardinale”. Abbiamo visto nel Capitolo VIII che il numero di classi contenute in una data classe è sempre maggiore del numero di membri della classe, e abbiamo dedotto che non esiste un più grande cardinale. Ma se potessimo, come abbiamo suggerito poco fa, sommare in un'unica classe gli individui, le classi di individui, le classi di classi di individui, ecc., otterremmo una classe di cui le sue stesse sottoclassi sarebbero membri. La classe costituita da tutti gli oggetti che possono essere contati, di qualsiasi tipo, deve, se esiste una tale classe, avere un cardinale che sia il più grande possibile. Poiché tutte le sue sottoclassi saranno membri di essa, non possono essercene più di quanti siano i membri. Quindi giungiamo a una contraddizione.

Quando mi imbattei per la prima volta in questa contraddizione, nell'anno 1901 , tentai di scoprire qualche difetto nella dimostrazione di Cantor, che abbiamo presentato nel Capitolo VIII, secondo cui non esiste un cardinale massimo. Applicando questa dimostrazione alla presunta classe di tutti gli oggetti immaginabili, fui condotto a una nuova e più semplice contraddizione, vale a dire la seguente:

La classe onnicomprensiva che stiamo considerando, che deve abbracciare ogni cosa, deve includere se stessa come uno dei suoi membri. In altre parole, se esiste una cosa come "ogni cosa", allora "ogni cosa" è qualcosa, ed è un membro della classe "ogni cosa". Ma normalmente una classe non è membro di se stessa. L'umanità, ad esempio, non è un uomo. Consideriamo ora l'insieme di tutte le classi che non sono membri di se stesse. Questa è una classe: è membro di se stessa o no? Se lo è, è una di quelle classi che non sono membri di se stesse, *cioè* non è membro di se stessa. Se non lo è, non è una di quelle classi che non sono membri di se stesse, *cioè* è membro di se stessa. Quindi, delle due ipotesi – che sia, e che non sia, membro di se stessa – ciascuna implica la sua contraddittoria. Questa è una contraddizione.

Non c'è difficoltà nel fabbricare contraddizioni simili *ad libitum* . La soluzione di tali contraddizioni mediante la teoria dei tipi è esposta in modo completo nei *Principia Mathematica* , [26] e anche, più brevemente, in articoli del presente autore nell'American Journal *of Mathematics* [27] e nella *Revue de*

Metaphysique et´ 137 *de Morale* . [28] Per ora è sufficiente una descrizione generale della soluzione .

La fallacia consiste nella formazione di quelle che potremmo definire classi "impure", *ovvero* classi che non sono pure per quanto riguarda il "tipo". Come vedremo in un capitolo successivo, le classi sono finzioni logiche, e un'affermazione che sembra riferirsi a una classe sarà significativa solo se è traducibile in una forma in cui non si fa menzione della classe stessa. Ciò pone un limite ai modi in cui quelli che nominalmente, sebbene non realmente, sono nomi di classi possono comparire in modo significativo: una frase o un insieme di simboli in cui tali pseudo-nomi compaiono in modo errato non è falsa, ma strettamente priva di significato. L'ipotesi che una classe sia, o non sia, membro di se stessa è priva di significato proprio in questo senso. E più in generale, supporre che una classe di individui sia membro, o non sia membro, di un'altra classe di individui significa supporre un nonsenso; e costruire simbolicamente una qualsiasi classe i cui membri non siano tutti dello stesso grado nella gerarchia logica significa usare i simboli in un modo che li rende privi di significato simbolico.

Pertanto , se nel mondo ci sono *n individui e* 2n classi di individui, non possiamo formare una nuova classe, composta sia da individui che da classi e avente *n* + 2n membri. In questo modo ' il tentativo di sfuggire alla necessità dell'assioma dell'infinito fallisce. Non pretendo di aver spiegato la dottrina dei tipi, né di aver fatto altro che indicare, a grandi linee, perché sia necessaria tale dottrina. Il

mio unico scopo è stato quello di dire quanto necessario per dimostrare che non possiamo *provare* l'esistenza di numeri e classi infiniti con i metodi artificiosi che abbiamo esaminato. Rimangono, tuttavia, alcuni altri possibili metodi che devono essere presi in considerazione.

Vari argomenti che pretendono di dimostrare l'esistenza di classi infinite sono presentati nei *Principi di Matematica* , § 3339 (p. 357). | Nella misura in cui questi 138 argomenti presuppongono che, se *n* è un cardinale induttivo, *n* non è uguale a *n* + 1 , sono già stati trattati. C'è un argomento, suggerito da un passo del *Parmenide* di Platone , secondo il quale , se esiste un numero come 1 , allora 1 ha essere; ma 1 non è identico a essere, e quindi 1 ed essere sono due, e quindi esiste un numero come 2 , e 2 insieme a 1 ed essere dà una classe di tre termini, e così via. Questo argomento è fallace, in parte perché “essere” non è un termine che ha un significato definito, e ancor più perché, se gli venisse attribuito un significato definito, si scoprirebbe che i numeri non hanno un essere: sono, infatti, ciò che vengono chiamate “finzioni logiche”, come vedremo quando

giungere a considerare la definizione di classi.

L'argomento secondo cui il numero di numeri da 0 a *n* (inclusi) è *n* + 1 dipende dall'ipotesi che fino a *n* incluso nessun numero sia uguale al suo successore, il che, come abbiamo visto, non sarà sempre vero se l'assioma dell'infinito è falso. Bisogna comprendere che l'equazione *n* = *n* + 1 , che potrebbe essere vera per un *n* finito se *n* superasse il numero totale di individui nel

mondo, è ben diversa dalla stessa equazione applicata a un numero riflessivo. Applicata a un numero riflessivo, significa che, data una classe di *n* termini, questa classe è "simile" a quella ottenuta aggiungendo un altro termine. Ma applicata a un numero troppo grande per il mondo reale, significa semplicemente che non esiste una classe di *n* individui, né una classe di *n* + 1 individui; Ciò non significa che, se estendiamo la gerarchia dei tipi a sufficienza per garantire l'esistenza di una classe di *n* termini, troveremo poi questa classe "simile" a una di *n* + 1 termini, poiché se *n* è induttivo ciò non accadrà, indipendentemente dalla verità o falsità dell'assioma dell'infinito.

C'è un argomento impiegato sia da Bolzano [29] che da Dedekind [30] per dimostrare l'esistenza di classi riflessive. L'argomento, in breve, è questo: un oggetto non è identico all'idea dell'oggetto , 139 ma esiste (almeno nel regno dell'essere) un'idea di ogni oggetto. La relazione di un oggetto con la sua idea è biunivoca, e le idee sono solo alcune tra gli oggetti. Quindi la relazione "idea di" costituisce una riflessione dell'intera classe degli oggetti in una parte di sé stessa, vale a dire, in quella parte che consiste di idee. Di conseguenza, sia la classe degli oggetti che la classe delle idee sono infinite. Questo argomento è interessante, non solo di per sé, ma perché gli errori in esso contenuti (o quelli che io giudico essere errori) sono di un tipo che è istruttivo notare. L'errore principale consiste nel presupporre che esista un'idea di ogni oggetto. È, ovviamente, estremamente difficile decidere cosa si intenda per "idea"; ma supponiamo di saperlo. Dobbiamo quindi supporre che, partendo (diciamo) da Socrate, ci sia l'idea di

Socrate, e poi l'idea dell'idea di Socrate, e così via *all'infinito* . Ora, è chiaro che non è così, nel senso che tutte queste idee hanno un'effettiva esistenza empirica nella mente delle persone. Oltre il terzo o quarto stadio diventano mitiche. Se l'argomento deve essere sostenuto, le "idee" intese devono essere idee platoniche custodite in cielo, poiché certamente non si trovano sulla terra. Ma allora diventa subito dubbioso che ci siano

sono tali idee. Se vogliamo sapere che esistono, dobbiamo basarci su una qualche teoria logica che dimostri che è necessario che esista un'idea di quella cosa. Certamente non possiamo ottenere questo risultato empiricamente, né applicarlo, come fa Dedekind, al "meine Gedankenwelt" - il mondo dei miei pensieri.

Se volessimo esaminare a fondo la relazione tra idea e oggetto, dovremmo addentrarci in una serie di indagini psicologiche e logiche, che non sono rilevanti per il nostro scopo principale. Ma è opportuno notare alcuni ulteriori punti. Se "idea" deve essere intesa logicamente, può essere *identica* all'oggetto, oppure può rappresentare una *descrizione* (nel senso che verrà spiegato in un capitolo successivo). Nel primo caso l'argomentazione fallisce, perché era essenziale per la dimostrazione della riflessività che oggetto e idea fossero distinti. Anche nel secondo caso l'argomentazione fallisce, perché la relazione tra oggetto e descrizione non è biunivoca : esistono innumerevoli descrizioni corrette di un dato oggetto. Socrate (*ad esempio*) può essere descritto come "il maestro di Platone", o come "il filosofo che

bevve la cicuta", o come "il marito di Santippe". Se - per riprendere l'ipotesi rimanente - "idea" deve essere interpretata psicologicamente, si deve sostenere che non esiste un'unica entità psicologica definita che potrebbe essere chiamata

L' idea dell'oggetto: esistono innumerevoli credenze e atteggiamenti, ognuno dei quali potrebbe essere definito *un'idea* dell'oggetto, nel senso in cui potremmo dire "la mia idea di Socrate è molto diversa dalla tua", ma non esiste alcuna entità centrale (tranne Socrate stesso) che leghi insieme le varie "idee di Socrate", e quindi non esiste alcuna relazione biunivoca tra idea e oggetto come presuppone l'argomentazione. Né, ovviamente, come abbiamo già notato, è vero psicologicamente che esistano idee (in un senso per quanto esteso) di più di una piccolissima parte delle cose del mondo. Per tutte queste ragioni, l'argomentazione di cui sopra a favore dell'esistenza logica delle classi riflessive deve essere respinta.

Si potrebbe pensare che, a prescindere da ciò che si possa dire sugli argomenti *logici* , gli argomenti *empirici* derivabili dallo spazio e dal tempo, dalla diversità dei colori, ecc., siano più che sufficienti a dimostrare l'esistenza effettiva di un numero infinito di particolari. Io non la penso così. Non abbiamo altra ragione se non il pregiudizio per credere nell'estensione infinita dello spazio e del tempo, almeno nel senso in cui spazio e tempo sono fatti fisici, non finzioni matematiche. Consideriamo naturalmente spazio e tempo come continui, o, perlomeno, come compatti; ma anche questo è principalmente un pregiudizio. La teoria dei

"quanti" in fisica, vera o falsa che sia, illustra il fatto che la fisica non potrà mai fornire una prova della continuità, sebbene potrebbe benissimo fornirne una confutazione . I sensi non sono sufficientemente precisi per distinguere tra moto continuo e rapida successione discreta, come chiunque può constatare al cinema. Un mondo in cui tutto il movimento consistesse in una serie di piccoli scatti finiti sarebbe empiricamente indistinguibile da un mondo in cui il movimento fosse continuo. Ci vorrebbe troppo spazio per difendere adeguatamente queste tesi; 141 per ora mi limito a suggerirle al lettore per la sua considerazione. Se sono valide, ne consegue che non esiste alcuna ragione empirica per credere che il numero di particolari nel mondo sia infinito, e che non potrà mai esserlo; inoltre, al momento non esiste alcuna ragione empirica per credere che il numero sia finito, sebbene sia teoricamente concepibile che un giorno possano esserci prove che puntino, seppur non in modo conclusivo, in quella direzione.

Dal fatto che l'infinito non è autocontraddittorio, ma non è nemmeno dimostrabile logicamente, dobbiamo concludere che non si può sapere *a priori* se il numero di cose nel mondo sia finito o infinito. La conclusione è, quindi, per usare una terminologia leibniziana, che alcuni dei mondi possibili sono finiti, altri infiniti, e non abbiamo modo di sapere a quale di questi due tipi appartenga il nostro mondo reale. L'assioma dell'infinito sarà vero in alcuni mondi possibili e falso in altri; se sia vero o falso in questo mondo, non possiamo dirlo.

In questo capitolo i sinonimi “individuo” e “particolare” sono stati usati senza alcuna spiegazione. Sarebbe impossibile spiegarli adeguatamente senza una dissertazione sulla teoria dei tipi più lunga di quanto sia appropriato per il presente lavoro, ma qualche parola prima di concludere l'argomento potrebbe contribuire a dissipare l'oscurità che altrimenti avvolgerebbe il significato di questi termini.

In un'affermazione ordinaria possiamo distinguere un verbo, che esprime un attributo o una relazione, dai sostantivi che esprimono il soggetto dell'attributo o i termini della relazione. "Cesare visse" attribuisce un attributo a Cesare; "Bruto uccise Cesare" esprime una relazione tra Bruto e Cesare. Usando la parola "soggetto" in senso generalizzato, possiamo chiamare sia Bruto che Cesare soggetti di questa proposizione: il fatto che Bruto sia grammaticalmente soggetto e Cesare oggetto è logicamente irrilevante, poiché la stessa occorrenza può essere espressa con le parole "Cesare fu ucciso da Bruto", dove Cesare è il soggetto grammaticale. | Così nel tipo più semplice di proposizione 142 avremo un attributo o una relazione che riguarda o intercorre tra uno, due o più "soggetti" in senso esteso. (Una relazione può avere più di due termini: *ad esempio,* "A dà B a C" è una relazione a *tre* termini.) Ora, spesso accade che, a un esame più attento, i soggetti apparenti si rivelino non essere realmente soggetti, ma suscettibili di analisi; l'unico risultato di ciò, tuttavia, è che nuovi soggetti prendono il loro posto. Accade anche che il verbo possa grammaticalmente diventare soggetto: *ad esempio,* potremmo dire: "Uccidere è una relazione che intercorre tra Bruto e Cesare".

Ma in questi casi la grammatica è fuorviante e, in un'affermazione diretta, seguendo le regole che dovrebbero guidare la grammatica filosofica, Bruto e Cesare appariranno come soggetti e uccidere come verbo.

Siamo quindi condotti alla concezione di termini che, quando compaiono nelle proposizioni, possono comparire *solo* come soggetti, e mai in altro modo. Questa è parte della vecchia definizione scolastica di *sostanza* ; ma la persistenza nel tempo, che apparteneva a quella nozione, non fa parte della nozione di cui ci occupiamo. Definiremo i "nomi propri" come quei termini che possono comparire solo come *soggetti* nelle proposizioni (usando "soggetto" nel senso esteso appena spiegato). Definiremo inoltre gli "individui" o "particolari" come gli oggetti che possono essere nominati con nomi propri. (Sarebbe meglio definirli direttamente, piuttosto che per mezzo del tipo di simboli con cui vengono simboleggiati; ma per fare ciò dovremmo addentrarci nella metafisica più di quanto sia auspicabile in questa sede). È, naturalmente, possibile che esista un regresso infinito: che ciò che appare come un particolare sia in realtà, a un esame più attento, una classe o una sorta di complesso. Se così fosse, l'assioma dell'infinito dovrebbe ovviamente essere vero. Ma se così non fosse, deve essere teoricamente possibile per l'analisi raggiungere i soggetti ultimi, ed è a questi che si attribuisce il significato di "particolari" o "individui". È al numero di questi che si presume si applichi l'assioma dell'infinito. Se è vero per essi, è vero per le loro classi, e per le classi delle loro classi, 143 , e così via; analogamente, se è falso per essi, è falso in tutta questa

gerarchia. Pertanto, è naturale enunciare l'assioma riguardo a essi piuttosto che riguardo a qualsiasi altro livello della gerarchia. Ma se l'assioma sia vero o falso, non sembra esserci alcun metodo noto per scoprirlo.

Capitolo XIV Incompatibilità e teoria della deduzione

Abbiamo ora esplorato, seppur in modo un po' frettoloso, 144 quella parte della filosofia della matematica che non richiede un esame critico dell'idea di *classe* . Nel capitolo precedente, tuttavia, ci siamo trovati di fronte a problemi che rendono tale esame imperativo. Prima di poterlo intraprendere, dobbiamo considerare alcune altre parti della filosofia della matematica, che finora abbiamo ignorato. In un trattamento sintetico, le parti di cui ci occuperemo ora vengono prima: sono più fondamentali di qualsiasi cosa abbiamo discusso finora. Tre argomenti ci riguarderanno prima di giungere alla teoria delle classi, vale a dire: (1) la teoria della deduzione, (2) le funzioni proposizionali, (3) le descrizioni. Di questi, il terzo non è logicamente presupposto nella teoria delle classi, ma è un esempio più semplice del *tipo* di teoria necessaria per trattare le classi. È il primo argomento, la teoria della deduzione, che ci interesserà nel presente capitolo.

La matematica è una scienza deduttiva: partendo da certe premesse, giunge, attraverso un rigoroso processo di deduzione, ai vari teoremi che la costituiscono. È vero che, in passato, le deduzioni matematiche erano spesso carenti di rigore; è anche vero che il rigore perfetto è un ideale difficilmente raggiungibile. Tuttavia, nella misura in cui manca il rigore in una dimostrazione matematica, la dimostrazione è difettosa; non è una giustificazione sostenere che il buon senso dimostra la correttezza del risultato, perché se dovessimo fare affidamento su questo, sarebbe meglio rinunciare del tutto all'argomentazione,

piuttosto che ricorrere alla fallacia in soccorso del buon senso. In matematica, una volta stabilite le premesse, non dovrebbe essere necessario alcun appello al buon senso, all'"intuizione" o a qualsiasi altra cosa che non sia la rigorosa logica deduttiva.

Kant, avendo osservato che i geometri del suo tempo non potevano dimostrare i loro teoremi con argomentazioni prive di supporto, ma necessitavano di un appello alla figura, elaborò una teoria del ragionamento matematico secondo la quale l'inferenza non è mai strettamente logica, ma richiede sempre il supporto di ciò che viene chiamato "intuizione". L'intera tendenza della matematica moderna, con la sua crescente ricerca del rigore, si è opposta a questa teoria kantiana. Ciò che nella matematica dell'epoca di Kant non può essere *dimostrato* , non può essere *conosciuto* – ad esempio, l'assioma delle parallele. Ciò che può essere conosciuto, in matematica e mediante metodi matematici, è ciò che può essere dedotto dalla pura logica. Tutto ciò che appartiene alla conoscenza umana deve essere accertato in altro modo – empiricamente, attraverso i sensi o attraverso l'esperienza in qualche forma, ma non *a priori* . Le basi positive di questa tesi si trovano nei *Principia Mathematica* , *passim* ; una sua difesa controversa è fornita nei *Principi di Matematica* . In questa sede non possiamo fare altro che rimandare il lettore a tali opere, poiché l'argomento è troppo vasto per essere trattato in modo frettoloso. Nel frattempo, presupporremo che tutta la matematica sia deduttiva e procederemo ad esaminare cosa implichi la deduzione.

Nella deduzione, abbiamo una o più proposizioni chiamate *premesse* , dalle quali inferiamo una proposizione chiamata *conclusione* . Ai nostri fini, sarà conveniente, quando originariamente ci sono diverse premesse, unirle in un'unica proposizione, in modo da poter parlare sia *della* premessa che *della* conclusione. Possiamo quindi considerare la deduzione come un processo mediante il quale passiamo dalla conoscenza di una certa proposizione, la premessa, alla conoscenza di un'altra certa proposizione, la conclusione. Ma non considereremo tale processo come deduzione *logica* a meno che non sia *corretto* , *cioè* a meno che non esista una relazione tra premessa e conclusione tale da darci il diritto di credere alla conclusione se sappiamo che la premessa è vera. È questa relazione che riveste il principale interesse nella teoria logica della deduzione.

Per poter dedurre validamente la verità di una proposizione, dobbiamo sapere che un'altra proposizione è vera e che tra le due esiste una relazione del tipo chiamato “implicazione”, *ovvero* che (come diciamo) la premessa “implica” la conclusione. (Definiremo questa relazione a breve.) Oppure possiamo sapere che una certa altra proposizione è falsa e che tra le due esiste una relazione del tipo chiamato “disgiunzione”, espressa da “ *p* o *q* ”, [31] cosicché la conoscenza che una è falsa ci permette di dedurre che l'altra è vera. Ancora una volta, ciò che desideriamo dedurre può essere la *falsità* di una proposizione, non la sua verità. Questa può essere dedotta dalla verità di un'altra proposizione, a condizione che sappiamo che le due sono “incompatibili”, *cioè*

che se una è vera, l'altra è falsa. Può anche essere dedotta dalla falsità di un'altra proposizione, esattamente nelle stesse circostanze in cui la verità dell'altra avrebbe potuto essere dedotta dalla verità della prima; *Ovvero,* dalla falsità di *p* possiamo dedurre la falsità di *q* , quando *q* implica *p* . Tutti e quattro questi sono casi di inferenza. Quando la nostra mente è concentrata sull'inferenza, sembra naturale considerare "implicazione" come la relazione fondamentale primitiva, poiché questa è la relazione che deve sussistere tra *p* e *q* se vogliamo essere in grado di dedurre la *verità* di *q* dalla *verità* di *p* . Ma per ragioni tecniche questa non è l'idea primitiva migliore da scegliere. Prima di procedere con idee e definizioni primitive, consideriamo ulteriormente le varie funzioni delle proposizioni suggerite dalle relazioni tra proposizioni menzionate in precedenza.

La più semplice di queste funzioni è la funzione negativa, “non- *p* ”. Questa è quella funzione di *p* che è vera quando *p* è falsa e falsa quando *p* è vera. È conveniente parlare della verità di una proposizione, o della sua falsità, come del suo “valore di verità” [32] ; *cioè la verità* è il “valore di verità” di una proposizione vera, e *la falsità* di una falsa.

Pertanto, non- *p* ha il valore di verità opposto a *p* . |

Possiamo considerare *la disgiunzione* successiva , " *p* o *q* ". Si tratta di una funzione 147 il cui valore di verità è vero quando *p* è vero e anche quando *q* è vero, ma è falso quando sia *p* che *q* sono falsi.

Possiamo poi considerare *la congiunzione* " *p* e *q* ". Questa ha valore di verità "vero" quando sia *p* che *q* sono veri; altrimenti ha valore di verità "falso".

Consideriamo la seguente *incompatibilità* , *ovvero* " *p* e *q* non sono entrambi veri". Questa è la negazione della congiunzione; è anche la disgiunzione delle negazioni di *p* e *q* , *cioè* è "non- *p* o non- *q* ". Il suo valore di verità è vero quando *p* è falso e analogamente quando *q* è falso; il suo valore di verità è falso quando *p* e *q* sono entrambi veri.

Infine, consideriamo *l'implicazione* , *ovvero* " *p* implica *q* ", o "se *p* , allora *q* ". Questa espressione va intesa nel senso più ampio che ci permetta di dedurre la verità di *q* se conosciamo la verità di *p* . Pertanto, la interpretiamo come: "A meno che *p* non sia falso, *q* è vero", o "o *p* è falso o *q* è vero". (Il fatto che "implica" possa avere altri significati non ci interessa; questo è il significato che ci risulta più comodo). Vale a dire, " *p* implica *q* " significa "non- *p* o *q* ": il suo valore di verità è vero se *p* è falso, analogamente se *q* è vero, ed è falso se *p* è vero e *q* è falso.

Abbiamo dunque cinque funzioni: negazione, disgiunzione, congiunzione, incompatibilità e implicazione. Avremmo potuto aggiungerne altre, ad esempio la falsità congiunta, "non- *p* e non- *q* ", ma le cinque sopra elencate sono sufficienti . La negazione si differenzia dalle altre quattro in quanto è una funzione di *una sola* proposizione, mentre le altre sono funzioni di *due* . Ma tutte e cinque concordano sul fatto che il loro valore di verità dipende solo da quello delle proposizioni che ne costituiscono gli

argomenti. Data la verità o la falsità di *p* , o di *p* e *q* (a seconda dei casi), ci viene data la verità o la falsità della negazione, della disgiunzione, della congiunzione, dell'incompatibilità o dell'implicazione. Una funzione di proposizioni che possiede questa proprietà è chiamata "funzione di verità".

L'intero significato di una funzione di verità è esaurito dall'enunciazione delle circostanze in cui essa è vera o falsa. "Non - *p* ", ad esempio, è semplicemente quella funzione di *p* che è vera quando *p* è falsa e falsa quando *p* è vera: non vi è alcun ulteriore significato da attribuirle. Lo stesso vale per " *p* o *q* " e per il resto. Ne consegue che due funzioni di verità che hanno lo stesso valore di verità per tutti i valori dell'argomento sono indistinguibili. Ad esempio, " *p* e *q* " è la negazione di "non- *p* o non *q* " e *viceversa* ; quindi ciascuna di esse può essere *definita* come la negazione dell'altra. Non vi è alcun ulteriore significato in una funzione di verità al di là delle condizioni in cui essa è vera o falsa.

È chiaro che le cinque funzioni di verità sopra riportate sono

Non tutti sono indipendenti. Possiamo definirne alcuni in termini di altri. Non c'è grande difficoltà nel ridurre il numero a due; i due scelti nei *Principia Mathematica* sono la negazione e la disgiunzione. L'implicazione è quindi definita come "non- *p* o *q* "; l'incompatibilità come "non- *p* o non- *q* "; la congiunzione come la negazione dell'incompatibilità. Ma è stato dimostrato da Sheffer 3 che possiamo accontentarci di *un'unica* idea primitiva per tutti e cinque, e da Nicod [4] che questo ci permette di ridurre le proposizioni primitive richieste nella teoria della deduzione a due

principi non formali e uno formale. A questo scopo, possiamo prendere come nostro unico indefinibile l'incompatibilità o la falsità congiunta. Sceglieremo la prima.

La nostra idea primitiva, ora, è una certa funzione di verità chiamata "incompatibilità", che denoteremo con *p q* . La negazione può essere definita immediatamente come l'incompatibilità di una proposizione con se stessa, *cioè* "non- *p* " è definito come " *p p* ". La disgiunzione è l'incompatibilità di non- *p* e non- *q* , *cioè* è (*pp*) | (*qq*). L'implicazione è l'incompatibilità di *p* e non- *q* , *cioè p* | (*qq*). La congiunzione è la negazione dell'incompatibilità, *cioè* è (*pq*) | (*pq*). Pertanto tutte le nostre altre quattro funzioni sono definite in termini di incompatibilità.

[3] *Trans. Am. Math. Soc.* , vol. xiv. pp. 281 – 288 .

[] *Proc. Camb. Phil. Soc.* , vol. xix., i., gennaio 1917 .

È ovvio che non ci sono limiti alla creazione di funzioni di verità, sia introducendo più argomenti sia ripetendo argomenti. Ciò che ci interessa è il collegamento di questo argomento con l'inferenza .

Se sappiamo che *p* è vero e che *p* implica *q* , possiamo procedere ad affermare *q* . C'è sempre inevitabilmente qualcosa *di* psicologico nell'inferenza: l'inferenza è un metodo con cui giungiamo a nuove conoscenze, e ciò che non è psicologico è la relazione che ci permette di inferire correttamente; ma il passaggio effettivo dall'affermazione di *p* all'affermazione di *q* è

un processo psicologico, e non dobbiamo cercare di rappresentarlo in termini puramente logici.

Nella pratica matematica, quando facciamo un'inferenza, abbiamo sempre un'espressione contenente proposizioni variabili, diciamo *p* e *q* , che sappiamo, in virtù della sua forma, essere vera per tutti i valori di *p* e *q* ; abbiamo anche un'altra espressione, parte della prima, che sappiamo essere vera anche per tutti i valori di *p* e *q* ; e in virtù dei principi di inferenza, siamo in grado di omettere questa parte della nostra espressione originale e affermare ciò che rimane. Questa spiegazione, alquanto astratta, può essere resa più chiara da alcuni esempi.

Supponiamo di conoscere i cinque principi formali di deduzione enumerati nei *Principia Mathematica* . (M. Nicod li ha ridotti a uno solo, ma poiché si tratta di una proposizione complessa, inizieremo con i cinque.) Queste cinque proposizioni sono le seguenti:

(1) " *p* o *p* " implica *p* — *cioè* se *p* è vero o *p* è vero, allora *p* è vero.

(2) *q* implica " *p* o *q* "— *ossia* la disgiunzione " *p* o *q* " è vera quando una delle sue alternative è vera.

(3) " *p* o *q* " implica " *q* o *p* ". Ciò non sarebbe necessario se avessimo una notazione teoricamente più perfetta, poiché nella concezione della disgiunzione non è coinvolto alcun ordine, quindi " *p* o *q* " e " *q* o *p* " dovrebbero essere identici. Ma poiché i nostri simboli, in qualsiasi forma conveniente, introducono

inevitabilmente un ordine, abbiamo bisogno di ipotesi appropriate per dimostrare che l'ordine è irrilevante.

( ) Se *p* è vero oppure " *q* o *r* " è vero, allora *q* è vero oppure " *p* o *r* " è vero. (La particolarità di questa proposizione serve ad aumentarne il potere deduttivo.) |

(5) Se *q* implica *r* , allora " *p* o *q* " implica " *p* o *r* ". 150

Questi sono i principi *formali* di deduzione impiegati nei *Principia Mathematica* . Un principio formale di deduzione ha un duplice uso, ed è per chiarirlo che abbiamo citato le cinque proposizioni sopra riportate. Esso serve come premessa di un'inferenza e come dimostrazione del fatto che la premessa implica la conclusione. Nello schema di un'inferenza abbiamo una proposizione *p* e una proposizione " *p* implica *q* ", da cui inferiamo *q* . Ora, quando ci occupiamo dei principi di deduzione, il nostro apparato di proposizioni primitive deve produrre sia la *p* che la " *p* implica *q* " delle nostre inferenze. Vale a dire, le nostre regole di deduzione devono essere usate non *solo* come *regole* , che è il loro uso per stabilire " *p* implica *q* ", ma *anche* come premesse sostanziali, *cioè* come la *p* del nostro schema. Supponiamo, ad esempio, di voler dimostrare che se *p* implica *q* , allora se *q* implica *r* ne consegue che *p* implica *r* . Abbiamo qui una relazione di tre proposizioni che enunciano delle implicazioni. Poniamo p_1 = *p* implica *q,* p_2 = *q* implica *r,* p_3 = *p* implica *r.*

Dobbiamo quindi dimostrare che p_1 implica che p_2 implica p_3. Ora prendiamo il quinto dei nostri principi precedenti, sostituiamo

non- *p* a *p* e ricordiamo che "non- *p* o *q* " è per definizione lo stesso di " *p* implica *q* ". Pertanto, il nostro quinto principio risulta:

“Se *q* implica *r* , allora ' *p* implica *q* ' implica ' *p* implica *r* '” *, cioè* “ p_2 implica che p_1 implica p_3 ”. Chiamiamo questa proposizione A.

Ma il quarto dei nostri principi, quando sostituiamo non- *p* , non- *q* , a *p* e *q* , e ricordiamo la definizione di implicazione, diventa:

“Se *p* implica che *q* implica *r* , allora *q* implica che *p* implica *r* .”

Sostituendo *p* con p_2 , *q* con p_1 e *r* con p_3 , si ottiene:

“ Se p_2 implica che p_1 implica p_3 , allora p_1 implica che p_2 implica p_3 . ” Chiamiamo questo B. |

Ora abbiamo dimostrato per mezzo del nostro quinto principio che 151

“ *p2* implica che *p1* implica p_3 ”, che è ciò che abbiamo *chiamato* A.

Abbiamo quindi qui un esempio dello schema di inferenza, poiché A rappresenta il *p* del nostro schema e B rappresenta “ *p* implica *q* ”. Quindi arriviamo a *q* , ovvero,

“ *p1* implica che *p2* implica p_3 , ”

che era la proposizione da dimostrare. In questa dimostrazione, l'adattamento del nostro quinto principio, che porta ad A, si presenta come una premessa sostanziale; mentre l'adattamento del nostro quarto principio, che porta a B, viene utilizzato per dare la *forma* dell'inferenza. Gli impieghi formali e materiali delle

premesse nella teoria della deduzione sono strettamente interconnessi, e non è molto importante tenerli separati, a patto di rendersi conto che in teoria sono distinti.

Il primo metodo per giungere a nuovi risultati da una premessa è quello illustrato nella deduzione precedente, ma che difficilmente può essere definito deduzione in senso stretto. Le proposizioni primitive, qualunque esse siano, devono essere considerate come affermate per tutti i possibili valori delle proposizioni variabili *p* , *q* , *r* che compaiono in esse. Possiamo quindi sostituire (ad esempio) *p* qualsiasi espressione il cui valore sia sempre una proposizione, *ad esempio* non- *p* , " *s* implica *t* ", e così via. Mediante tali sostituzioni otteniamo in realtà insiemi di casi particolari della nostra proposizione originale, ma da un punto di vista pratico otteniamo quelle che sono virtualmente nuove proposizioni. La legittimità di sostituzioni di questo tipo deve essere garantita mediante un principio di inferenza non formale. [5]

Possiamo ora enunciare l'unico principio formale di inferenza a cui M. Nicod ha ridotto i cinque sopra indicati. A tal fine, mostreremo innanzitutto come certe funzioni di verità possono essere definite in termini di incompatibilità. Abbiamo già visto che

p | (*qq*) significa “ *p* implica *q* ”. |

[5] Nessun principio di questo tipo è enunciato nei *Principia Mathematica* o nell'articolo del signor Nicod sopra citato. Ma sembrerebbe trattarsi di un'omissione.

Osserviamo ora che 152

$p \mid (q\ r)$ significa “ p implica sia q che r ”.

Questa espressione significa " p è incompatibile con l'incompatibilità di q e r ", *ovvero* " p implica che q e r non sono incompatibili", *cioè* " p implica che q e r sono entrambe vere", poiché, come abbiamo visto, la congiunzione di q e r è la negazione della loro incompatibilità.

Osserviamo ora che $t \mid (tt)$ significa “ t implica se stesso”. Questo è un caso particolare di $p \mid (q\ q)$.

Scriviamo p per la negazione di p ; quindi ps significherà la negazione di ps , *cioè* significherà la congiunzione di p e s . Ne consegue che

$(sq) \mid ps$

esprime l'incompatibilità di sq con la congiunzione di p e s ; in altre parole, afferma che se p e s sono entrambe vere, *allora* $s\ q$ è falsa, *cioè* s e q sono entrambe vere; in parole ancora più semplici, afferma che p e s insieme implicano s e q insieme.

Ora, poniamo $P = p \mid (qr)$, $\pi = t \mid (tt)$,

$Q = (sq) \mid p\ s$.

Quindi l'unico principio formale di deduzione del signor Nicod è

$P \mid \pi \quad Q$,

In altre parole, P implica sia π che Q.

Egli impiega inoltre un principio non formale appartenente alla teoria dei tipi (che non ci interessa), e uno corrispondente al principio secondo cui, dato *p* , e dato che *p* implica *q* , possiamo affermare *q* . Questo principio è:

“Se *p* | (*r q*) è vero, e *p* è vero, allora *q* è vero.” Da questo apparato segue tutta la teoria della deduzione, tranne per quanto riguarda la deduzione dall'esistenza o dalla verità universale delle “funzioni proposizionali”, che prenderemo in considerazione nel prossimo capitolo.

C'è, se non sbaglio, una certa confusione nelle menti di alcuni autori riguardo alla relazione, 193 tra proposizioni, in virtù della quale un'inferenza è valida. Affinché sia *valido* inferire *q* da *p* , è sufficiente che *p* sia vera e che la proposizione "non- *p* o *q* " sia vera. Ogniqualvolta ciò accada, è chiaro che *q* deve essere vera. Ma l'inferenza avrà luogo solo quando la proposizione "non- *p* o *q* " è *nota* in modo diverso dalla conoscenza di non- *p* o dalla conoscenza di *q* . Ogniqualvolta *p* è falsa, "non- *p* o *q* " è vera,

ma è inutile per l'inferenza, che richiede che *p* sia vera. Ogni volta che si sa già che *q* è vera, si sa ovviamente che anche "non- *p* o *q* " è vera, ma è di nuovo inutile per l'inferenza, poiché *q* è già nota e quindi non ha bisogno di essere inferita. Infatti, l'inferenza si verifica solo quando "non- *p* o *q* " può essere conosciuto senza che noi sappiamo già quale delle due alternative rende vera la disgiunzione. Ora, le circostanze in cui ciò si verifica sono quelle in cui esistono certe relazioni di forma tra *p* e *q* . Ad esempio, sappiamo che se *r* implica la negazione di *s* , allora *s* implica la

negazione di *r* . Tra " *r* implica non- *s* " e " *s* implica non -*r* " esiste una relazione formale che ci permette di *sapere* che la prima implica la seconda, senza dover prima sapere che la prima è falsa o sapere che la seconda è vera. È in tali circostanze che la relazione di implicazione è praticamente utile per trarre inferenze.

Ma questa relazione formale è necessaria solo per poter *stabilire* se la premessa è falsa o se la conclusione è vera. È la verità di "non- *p* o *q* " che è richiesta per la *validità* dell'inferenza; ciò che è richiesto ulteriormente serve solo per la fattibilità pratica dell'inferenza.

Il professor CI Lewis [33] ha studiato in particolare la relazione più ristretta e formale che possiamo chiamare “deducibilità formale”. Egli sostiene che la relazione più ampia, quella espressa da “non- *p* o *q* ”, non dovrebbe essere chiamata “implicazione”. Questa è, tuttavia, una questione di parole. | Purché il nostro uso delle parole sia coerente, importa poco come le definiamo. Il punto essenziale di differenza tra la teoria che sostengo e la teoria sostenuta dal professor Lewis è questo: egli sostiene che, quando una proposizione *q* è “formalmente deducibile” da un'altra *p* , la relazione che percepiamo tra di esse è quella che egli chiama “implicazione stretta”, che non è la relazione espressa da “non- *p* o *q* ”, ma una relazione più ristretta, valida solo quando ci sono certe connessioni formali tra *p* e *q* . Sostengo che, a prescindere dal fatto che esista o meno una relazione di cui parla, essa è in ogni caso superflua per la matematica e, pertanto, per ragioni generali di economia, non dovrebbe essere ammessa nel nostro

apparato di nozioni fondamentali; che, ogniqualvolta sussista la relazione di "deducibilità formale" tra due proposizioni, si può constatare che o la prima è falsa o la seconda è vera, e che nulla al di là di questo fatto

è necessario ammetterlo nelle nostre premesse; e che, infine, le ragioni di dettaglio che il professor Lewis adduce contro la tesi che sostengo possono essere tutte confutate nel dettaglio e dipendono, per la loro plausibilità, da un'assunzione implicita e inconscia del punto di vista che io rifiuto. Concludo, pertanto, che non vi è bisogno di ammettere come nozione fondamentale alcuna forma di implicazione non esprimibile come funzione di verità.

Capitolo XV Funzioni proposizionali

Nel capitolo precedente, quando abbiamo discusso delle proposizioni 155 , non abbiamo tentato di dare una definizione del termine "proposizione". Tuttavia, sebbene la parola non possa essere definita formalmente, è necessario dire qualcosa sul suo significato, al fine di evitare la frequentissima confusione con le "funzioni proposizionali", che saranno l'argomento del presente capitolo.

Per “proposizione” intendiamo principalmente una forma verbale che esprime ciò che è vero o falso. Dico “principalmente” perché non voglio escludere altro che simboli verbali, o persino semplici pensieri se hanno un carattere simbolico. Ma penso che la parola “proposizione” dovrebbe essere limitata a ciò che, in un certo senso, può essere chiamato “simboli”, e ulteriormente a quei simboli che danno espressione alla verità e alla falsità. Quindi “due più due fa quattro” e “due più due fa cinque” saranno proposizioni, così come “Socrate è un uomo” e “Socrate non è un uomo”. L’affermazione: “Qualunque siano i numeri ^{a} e b, $(a + b)^{2} = a^{2} + {}^{2}ab + {}^{b^{2}}$ ” *è una* proposizione ; *Ma* la formula nuda “$(a + b)^{2} = a^{2} + {}^{2}ab + b^{2}$” da sola non lo è, poiché non afferma nulla di definito a meno che non ci venga ulteriormente detto, o indotto a supporre, che a *e* b *debbano* assumere tutti i valori possibili, o debbano assumere determinati valori. La prima di queste ipotesi è tacitamente assunta, di norma, nell'enunciazione delle formule matematiche, che diventano così proposizioni; ma se non si facesse tale assunzione, sarebbero “funzioni proposizionali”. Una

“funzione proposizionale”, infatti, è un'espressione contenente uno o più costituenti indeterminati, tali che , quando a questi costituenti vengono assegnati valori , l'espressione diventa una proposizione. In altre parole, è una funzione i cui valori sono proposizioni. Ma quest'ultima definizione deve essere usata con cautela. Una funzione descrittiva, *ad esempio* "la proposizione più difficile nel trattato matematico di A", non sarà una funzione proposizionale, sebbene i suoi valori siano proposizioni. In tal caso, però, le proposizioni vengono solo descritte: in una funzione proposizionale, i valori devono effettivamente *enunciare* delle proposizioni.

Esempi di funzioni proposizionali sono facili da fornire: " *x* è umano" è una funzione proposizionale; finché *x* rimane indeterminato, non è né vero né falso, ma quando a *x* viene assegnato un valore diventa una proposizione vera o falsa. Qualsiasi equazione matematica è una funzione proposizionale. Finché le variabili non hanno un valore definito, l'equazione è semplicemente un'espressione in attesa di essere determinata per diventare una proposizione vera o falsa. Se è un'equazione contenente una variabile, diventa vera quando la variabile è uguale a una radice dell'equazione, altrimenti diventa falsa; ma se è un'identità, sarà vera quando la variabile è un numero qualsiasi. L'equazione di una curva in un piano o di una superficie nello spazio è una funzione proposizionale, vera per i valori delle coordinate appartenenti ai punti sulla curva o sulla superficie, falsa per altri valori. Espressioni della logica tradizionale come "ogni A è B" sono funzioni proposizionali: A e B devono essere

determinati come classi definite prima che tali espressioni diventino vere o false.

La nozione di "casi" o "istanze" dipende dalle funzioni proposizionali. Consideriamo, ad esempio, il tipo di processo suggerito da ciò che viene chiamato "generalizzazione", e prendiamo un esempio molto semplice, diciamo: "un fulmine è seguito da un tuono". Abbiamo un certo numero di "istanze" di questo, *ovvero* un certo numero di proposizioni come: "questo è un lampo ed è seguito da un tuono". Di cosa sono "istanze" questi eventi? Sono istanze della funzione proposizionale: "Se *x* è un lampo, *x* è seguito da un tuono". Il processo di generalizzazione (della cui validità non ci occupiamo , fortunatamente, 157) consiste nel passare da un certo numero di tali istanze alla verità *universale* della funzione proposizionale: "Se *x* è un lampo, *x* è seguito da un tuono". Si scoprirà che, in modo analogo, le funzioni proposizionali sono sempre coinvolte quando parliamo di istanze, casi o esempi.

Non è necessario porsi, né tentare di rispondere, alla domanda: "Che *cos'*è una funzione proposizionale?". Una funzione proposizionale, considerata isolatamente, può essere ritenuta un mero schema, un mero involucro, un ricettacolo vuoto di significato, non qualcosa di già significativo. Ci occupiamo delle funzioni proposizionali, in senso lato, in due modi: in primo luogo, in relazione alle nozioni di "vero in tutti i casi" e "vero in alcuni casi"; in secondo luogo, in relazione alla teoria delle classi e delle

relazioni. Il secondo di questi argomenti verrà trattato in un capitolo successivo; il primo deve ora occuparci.

Quando diciamo che qualcosa è "sempre vero" o "vero in tutti i casi", è chiaro che quel "qualcosa" non può essere una proposizione. Una proposizione è semplicemente vera o falsa, e la questione finisce lì. Non esistono casi in cui "Socrate è un uomo" o "Napoleone morì a Sant'Elena". Queste sono proposizioni, e sarebbe privo di senso affermare che siano vere "in tutti i casi". Questa espressione si applica solo alle *funzioni* proposizionali . Si pensi, ad esempio, a ciò che si dice spesso quando si discute di causalità. (Non ci interessa la verità o la falsità di ciò che viene detto, ma solo la sua analisi logica.) Ci viene detto che A è, in ogni caso, seguito da B. Ora, se ci sono "casi" di A, A deve essere un concetto generale per il quale è significativo dire " x_1 è A", " x_2 è A", " x_3 è A", e così via, dove x_1, x_2, x_3 sono particolari che non sono identici tra loro. Questo si applica, *ad esempio* , al nostro caso precedente del fulmine. Diciamo che il fulmine (A) è seguito dal tuono (B). Ma i singoli lampi sono particolari, non identici, ma condividono la proprietà comune di essere fulmini. L'unico modo per esprimere una proprietà comune in generale è dire che una proprietà comune di un certo numero di oggetti è una funzione proposizionale che diventa vera quando uno qualsiasi di questi oggetti viene preso come valore della variabile. In questo caso tutti gli oggetti sono “istanze” della verità della funzione proposizionale: una funzione proposizionale, pur non potendo essere di per sé vera o falsa, è vera in certi casi e falsa in altri, a meno che non sia “sempre vera” o “sempre falsa”. Quando, per

tornare al nostro esempio, diciamo che A è in ogni caso seguito da B, intendiamo che, qualunque sia *x , se x* è un A, è seguito da un B; vale a dire, stiamo affermando che una certa funzione proposizionale è “sempre vera”.

Le frasi che contengono parole come "tutti", "ogni", "un", "il", "alcuni" richiedono funzioni proposizionali per la loro interpretazione. Il modo in cui si verificano le funzioni proposizionali può essere spiegato per mezzo di due delle parole sopra citate, ovvero "tutti" e "alcuni".

In ultima analisi, con una funzione proposizionale si possono fare solo due cose: una è affermare che è vera in *tutti i* casi, l'altra è affermare che è vera in almeno un caso, o in *alcuni* casi (come diremo, supponendo che non vi sia alcuna implicazione necessaria di una pluralità di casi). Tutti gli altri usi delle funzioni proposizionali possono essere ricondotti a questi due. Quando diciamo che una funzione proposizionale è vera "in tutti i casi", o "sempre" (come diremo anche, senza alcuna indicazione temporale), intendiamo che tutti i suoi valori sono veri. Se " ϕx " è la funzione e *a* è il tipo di oggetto corretto per essere un argomento di " ϕx ", allora ϕa deve essere vera, indipendentemente da come sia stato scelto *a* . *Ad esempio, "se a* è umano, *a* è mortale" è vera sia che *a* sia umano o meno; di fatto, ogni proposizione di questa forma è vera. Pertanto, la funzione proposizionale “se *x* è umano, *x* è mortale” è “sempre vera”, o “vera in tutti i casi”. Oppure, ancora, l’affermazione “non esistono unicorni” è la stessa dell’affermazione “la funzione proposizionale

’ *x* non è un unicorno’ è vera in tutti i casi”. Le asserzioni del capitolo precedente sulle proposizioni, *ad esempio* “' *p* o *q* ' implica ' *q* o *p* '”, sono in realtà asserzioni secondo cui certe funzioni proposizionali sono vere in tutti i casi. Non affermiamo il principio di cui sopra, ad esempio, come vero solo per questo o quel particolare *p* o *q* , ma come vero per *qualsiasi p* o *q* rispetto al quale può essere reso significativo. La condizione che una funzione sia *significativa* per un dato argomento è la stessa della condizione che essa abbia un valore per quell’argomento, vero o falso. Lo studio delle condizioni di significatività appartiene alla dottrina dei tipi, che non approfondiremo oltre lo schema fornito nel capitolo precedente.

Non solo i principi della deduzione, ma tutte le proposizioni primitive della logica, consistono nell'asserzione che certe funzioni proposizionali sono sempre vere.

Se così non fosse, dovrebbero menzionare cose o concetti particolari – Socrate, o il rossore, o l'est e l'ovest, o chissà cos'altro – e chiaramente non è compito della logica fare asserzioni che siano vere riguardo a una cosa o a un concetto ma non riguardo a un altro. Fa parte della definizione di logica (ma non ne costituisce l'intera definizione) che tutte le sue proposizioni siano completamente generali, *ovvero* che consistono tutte nell'asserzione che una funzione proposizionale priva di termini costanti sia sempre vera. Torneremo nel nostro ultimo capitolo alla discussione delle funzioni proposizionali prive di termini costanti. Per ora passeremo all'altra cosa che si deve

fare con una funzione proposizionale, ovvero l'asserzione che essa sia "talvolta vera", *cioè* vera almeno in un caso.

Quando diciamo “ci sono uomini”, significa che la funzione proposizionale “ *x* è un uomo” è talvolta vera. Quando diciamo “alcuni uomini sono greci”, significa che la funzione proposizionale “ *x* è un uomo e un greco” è talvolta vera. Quando diciamo “i cannibali esistono ancora in Africa”, significa che la funzione proposizionale “ *x* è un cannibale ora in Africa” è talvolta vera, *cioè* è vera per alcuni valori di *x* . Dire “ci sono almeno *n* individui nel mondo” significa dire che la funzione proposizionale “ *α* è una classe di individui e un membro del numero cardinale *n* ” è talvolta vera, o, come possiamo dire, è vera per certi valori di *α* . Questa forma di espressione è più conveniente quando è necessario indicare quale è il costituente variabile che stiamo prendendo come argomento della nostra funzione proposizionale. Ad esempio, la funzione proposizionale di cui sopra, che possiamo abbreviare in " *α* è una classe di *n* individui", contiene due variabili, *α* e *n* . L'assioma dell'infinito, nel linguaggio delle funzioni proposizionali, è: "La funzione proposizionale 'se *n* è un numero induttivo, è vero per alcuni valori di *α* che *α* è una classe di *n* individui' è vera per tutti i possibili valori di *n* ". Qui c'è una funzione subordinata, " *α* è una classe di *n* individui", che si dice essere, rispetto ad *α* , *talvolta* vera; e l'affermazione che ciò accade se *n* è un numero induttivo si dice essere, rispetto a *n* , *sempre* vera.

L'affermazione che una funzione ϕx è sempre vera è la negazione dell'affermazione che non- ϕx è talvolta vera, e l'affermazione che ϕx è talvolta vera è la negazione dell'affermazione che non- ϕx è sempre vera. Quindi l'affermazione "tutti gli uomini sono mortali" è la negazione dell'affermazione che la funzione " x è un uomo immortale" è talvolta vera. E l'affermazione "esistono gli unicorni" è la negazione dell'affermazione che la funzione " x non è un unicorno" è sempre vera. [34] Diciamo che ϕx è "mai vero" o "sempre falso" se non- ϕx è sempre vero. Possiamo, se lo desideriamo, prendere uno dei due "sempre", "talvolta" come idea primitiva e definire l'altro per mezzo dell'uno e della negazione. Quindi, se scegliamo “a volte” come nostra idea primitiva, possiamo definire: “' ϕx è sempre vero' significa 'è falso che non ϕx sia a volte vero'”. Ma per ragioni legate alla teoria dei tipi sembra più corretto prendere sia “sempre” che “a volte” come idee primitive e definire per mezzo di esse la negazione delle proposizioni in cui compaiono. Vale a dire, supponendo di avere già | definita (o adottata 161 come idea primitiva) la negazione delle proposizioni del tipo a cui appartiene ϕx , definiamo: "La negazione di ' ϕx *sempre* ' è 'non- ϕx a volte'; e la negazione di ' ϕx a volte' è 'non- ϕx sempre'". Allo stesso modo possiamo ridefinire la disgiunzione e le altre funzioni di verità, applicate alle proposizioni contenenti variabili apparenti, in termini delle definizioni e delle idee primitive per le proposizioni che non contengono variabili apparenti. Proposizioni contenenti

Le proposizioni senza variabili apparenti sono chiamate “proposizioni elementari”. Da queste possiamo risalire passo

dopo passo, utilizzando i metodi appena indicati, alla teoria delle funzioni di verità applicata alle proposizioni contenenti una, due, tre... variabili, o qualsiasi numero fino a *n* , dove *n* è un qualsiasi numero finito assegnato. [35]

Le forme che nella logica formale tradizionale sono considerate le più semplici sono in realtà ben lungi dall'esserlo, e tutte implicano l'asserzione di tutti i valori o di alcuni valori di una funzione proposizionale composta. Prendiamo, per cominciare, "ogni S è P". Supponiamo che S sia definito da una funzione proposizionale ϕx e P da una funzione proposizionale ψx . *Ad esempio* , se S è *uomini* , ϕx sarà " *x* è umano"; se P è *mortali* , ψx sarà "c'è un momento in cui *x* muore". Quindi "ogni S è P" significa: "' ϕx implica ψx ' è sempre vero". Va osservato che "ogni S è P" non si applica solo ai termini che sono effettivamente S; dice qualcosa anche sui termini che non sono S. Supponiamo di incontrare un *x* di cui non sappiamo se sia un S o meno; Tuttavia, la nostra affermazione "ogni S è P" ci dice qualcosa su *x* , vale a dire che *se x* è un S, allora *x* è un P. E questo è altrettanto vero quando *x* non è un S quanto quando *x* è un S. Se non fosse ugualmente vero in entrambi i casi, la *reductio ad absurdum* non sarebbe un metodo valido; poiché l'essenza di questo metodo consiste nell'utilizzare le implicazioni nei casi in cui (come si scopre in seguito) l'ipotesi è falsa. Possiamo mettere la questione in un altro modo. Per comprendere "ogni S è P", non è necessario essere in grado di enumerare quali termini sono S; a condizione di sapere cosa si intende per essere un S e cosa per essere un P, possiamo comprendere appieno ciò che è effettivamente affermato da "

ogni S è P", 162 per quanto poco possiamo sapere di casi concreti di entrambi. Ciò dimostra che non sono solo i termini effettivi che sono S ad essere rilevanti nell'affermazione "ogni S è P", ma tutti i termini rispetto ai quali la supposizione che siano S è significativa, *cioè* tutti i termini che sono S, insieme a tutti i termini che non sono S, *ovvero* l'intero "tipo" logico appropriato. Ciò che si applica alle affermazioni su *tutti* si applica anche alle affermazioni su *alcuni* . "Ci sono uomini", *ad esempio* , significa che " *x* è umano" è vero per *alcuni* valori di *x* . Qui *tutti* i valori di *x* (*cioè* tutti i valori per i quali " *x*"è umano" è significativo, che sia vero o falso) sono rilevanti, e non solo quelli che sono effettivamente umani. (Questo diventa ovvio se consideriamo come potremmo dimostrare che una tale affermazione è *falsa* .) Ogni asserzione su "tutti" o "alcuni" implica quindi

non solo gli argomenti che rendono vera una certa funzione, ma tutti quelli che la rendono significativa, *cioè* tutti quelli per cui ha un valore, siano essi veri o falsi.

Possiamo ora procedere con la nostra interpretazione delle forme tradizionali della logica formale classica. Supponiamo che S siano i termini *x* per i quali ϕx è vera, e P siano quelli per i quali ψx è vera. (Come vedremo in un capitolo successivo, tutte le classi sono derivate in questo modo dalle funzioni proposizionali.) Quindi:

“Tutto S è P” significa che “' ϕx implica ψx ' è sempre vero.”

“Some S is P” significa “' ϕx e ψx ' è talvolta vero.”

“Nessun S è P” significa che “' ϕx implica non- ψx ' è sempre vero.”

“Alcuni S non sono P” significa “' ϕx e non- ψx ' a volte è vero.”

Si osserverà che le funzioni proposizionali che qui vengono affermate per tutti o alcuni valori non sono ϕx e ψx stesse, ma funzioni di verità di ϕx e ψx per lo *stesso* argomento x . Il modo più semplice per concepire il tipo di cosa che si intende è partire non da ϕx e ψx in generale, ma da ϕa e ψa , dove a è una costante. Supponiamo di considerare " tutti gli uomini sono mortali": inizieremo con

“Se Socrate è umano, allora Socrate è mortale” |

e quindi considereremo “Socrate” come sostituito da 163 una variabile x ovunque “Socrate” compaia. L’obiettivo da garantire è che, sebbene x rimanga una variabile, senza alcun valore definito, essa abbia lo stesso valore in “ ϕx ” e in “ ψx ” quando affermiamo che “ ϕx implica ψx ” è sempre vero. Ciò richiede che partiamo da una funzione i cui valori siano tali che “ ϕa implica ψa ”, piuttosto che da due funzioni separate ϕx e ψx ; perché se partiamo da due funzioni separate non possiamo mai garantire che x , pur rimanendo indeterminato, abbia lo stesso valore in entrambe.

Per brevità diciamo “ ϕx implica sempre ψx ” quando intendiamo che “ ϕx implica ψx ” è sempre vera. Le proposizioni della forma “ ϕx implica sempre ψx ” sono chiamate “implicazioni formali”; questo nome viene usato anche se ci sono più variabili.

Le definizioni di cui sopra mostrano quanto siano lontane dalle forme più semplici proposizioni come "ogni S è P", da cui parte la logica tradizionale. È tipico della mancanza di analisi che caratterizza la logica tradizionale il fatto che tratti "ogni S è P" come una proposizione della stessa forma di " *x* è P" – *ad esempio* , tratta "tutti gli uomini sono mortali" come se avesse la stessa forma di "Socrate è mortale".

Come abbiamo appena visto, la prima forma è " ϕx implica sempre ψx ", mentre la seconda è della forma " ψx ". La netta separazione di queste due forme, operata da Peano e Frege, rappresentò un progresso fondamentale nella logica simbolica.

Si vedrà che "tutti gli S sono P" e "nessun S è P" non differiscono realmente nella forma, se non per la sostituzione di non- ψx con ψx , e che lo stesso vale per "alcuni S sono P" e "alcuni S non sono P". Bisogna inoltre osservare che le regole di conversione tradizionali sono errate, se adottiamo il punto di vista, che è l'unico tecnicamente tollerabile, secondo cui proposizioni come "tutti gli S sono P" non implicano l'"esistenza" di S, *cio*è non richiedono che ci siano termini che siano S. Le definizioni di cui sopra portano al risultato che, se ϕx è sempre falso, *cio*è se non ci sono S, allora "tutti gli S sono P" e "nessun S è P" saranno entrambi veri, qualunque P 164 possa essere. Infatti, secondo la definizione del capitolo precedente, " ϕx implica ψx " significa "non- ϕx o ψx ", il che è sempre vero se non- ϕx è sempre vero. In un primo momento, questo risultato potrebbe indurre il lettore a desiderare definizioni diverse , ma un po' di esperienza pratica

mostra presto che qualsiasi definizione diversa sarebbe scomoda e nasconderebbe le idee importanti. La proposizione " ϕx implica sempre ψx e ϕx è talvolta vero" è essenzialmente composta, e sarebbe molto goffo darla come

la definizione di "ogni S è P", perché allora non dovremmo avere più linguaggio per " ϕx implica sempre ψx ", che è necessario cento volte per una volta che l'altro è necessario. Ma, con le nostre definizioni, "ogni S è P" non implica "qualche S è P", poiché la prima ammette la non esistenza di S e la seconda no; quindi la conversione *per accidens* diventa invalida e alcuni modi del sillogismo sono fallaci, *ad esempio* Darapti: "Ogni M è S, ogni M è P, quindi qualche S è P", che fallisce se non c'è M.

Il concetto di "esistenza" assume diverse forme, una delle quali ci interesserà nel prossimo capitolo; ma la forma fondamentale è quella che deriva immediatamente dal concetto di "talvolta vero". Diciamo che un argomento *a* "soddisfa" una funzione ϕx se ϕa è vera; questo è lo stesso senso in cui si dice che le radici di un'equazione soddisfano l'equazione stessa. Ora, se ϕx è talvolta vera, possiamo dire che esistono *x* per cui è vera, oppure possiamo dire che " *esistono argomenti che soddisfano* ϕx ". Questo è il significato fondamentale della parola "esistenza". Altri significati derivano da questo, oppure rappresentano una mera confusione di pensiero. Possiamo dire correttamente che "gli uomini esistono", intendendo che " *x* è un uomo" è talvolta vero. Ma se formuliamo uno pseudo-sillogismo: "Gli uomini esistono, Socrate è un uomo, quindi Socrate esiste", stiamo dicendo

sciocchezze, poiché "Socrate" non è, come "uomini", semplicemente un argomento indeterminato a una data funzione proposizionale. La fallacia è strettamente analoga a quella dell'argomento: "Gli uomini sono numerosi, Socrate è un uomo, quindi Socrate è numeroso". In questo caso è ovvio che la conclusione è insensata, ma nel caso dell'esistenza non è ovvio, per 165 ragioni che appariranno più compiutamente nel prossimo capitolo. Per ora, limitiamoci a notare che, sebbene sia corretto dire "gli uomini esistono", è scorretto, o meglio privo di senso, attribuire l'esistenza a un dato particolare *x* che si dà il caso sia un uomo. In generale, "esistono termini che soddisfano ϕx " significa " ϕx è talvolta vero"; ma “ *a* esiste” (dove *a* è un termine che soddisfa ϕx) è un mero rumore o una forma, priva di significato. Si scoprirà che tenendo presente questa semplice fallacia possiamo risolvere molti antichi enigmi filosofici riguardanti il significato dell’esistenza.

Un altro insieme di nozioni su cui la filosofia si è lasciata confondere in modo irreversibile, non distinguendo sufficientemente proposizioni e funzioni proposizionali, è quello di "modalità": *necessario* , *possibile* e *impossibile* . (A volte si usa *"contingente* " o *"assertivo" al posto di "possibile* "). La visione tradizionale era che, tra le proposizioni vere, alcune fossero necessarie, mentre altre fossero semplicemente contingenti o assertive; mentre tra le proposizioni false alcune fossero impossibili, vale a dire quelle le cui contraddizioni erano necessarie, mentre altre semplicemente non erano vere. In realtà, tuttavia, non c'è mai stata una chiara spiegazione di cosa

aggiungesse alla verità il concetto di necessità. Nel caso delle funzioni proposizionali, la triplice divisione è ovvia. Se " ϕx " è un valore indeterminato di una certa funzione proposizionale, sarà *necessario* se la funzione è sempre vera, *possibile* se a volte è vera e *impossibile* se non è mai vera. Questo tipo di situazione si presenta, ad esempio, in relazione alla probabilità. Supponiamo che una pallina *x* venga estratta da un sacchetto contenente un certo numero di palline: se tutte le palline sono bianche, " *x* è bianca" è necessario; se alcune sono bianche, è possibile; se nessuna, è impossibile. Qui tutto ciò che *sappiamo* di *x* è che soddisfa una certa funzione proposizionale, vale a dire, " *x* era una pallina nel sacchetto". Questa è una situazione generale nei problemi di probabilità e non rara nella vita pratica, *ad esempio* quando ci chiama una persona di cui non sappiamo nulla se non che porta una lettera di presentazione del nostro amico tale e tale. In tutti questi casi , come per quanto riguarda la modalità 166 in generale, la funzione proposizionale è rilevante. Per un pensiero chiaro, in molte direzioni molto diverse, l'abitudine di mantenere le funzioni proposizionali nettamente separate dalle proposizioni è della massima importanza, e non averlo fatto in passato è stato un disonore per la filosofia.

Capitolo XVI Descrizioni

Nel capitolo precedente abbiamo trattato le parole 167 " *tutti"* e *"alcuni"* ; in questo capitolo prenderemo in esame la parola *"il"* al singolare, e nel capitolo successivo la prenderemo in esame *al* plurale. Potrebbe sembrare eccessivo dedicare due capitoli a una sola parola, ma per il matematico filosofo si tratta di una parola di grandissima importanza: come il Grammatico di Browning con l'enclitica *δῳ* , darei la dottrina di questa parola anche se fossi "morto dalla vita in giù" e non semplicemente in prigione.

Abbiamo già avuto modo di menzionare le “funzioni descrittive”, *ovvero* espressioni come “il padre di *x* ” o “il seno di *x* ”. Queste vanno definite definendo prima le “descrizioni”.

Una “descrizione” può essere di due tipi: definita e indefinita (o ambigua). Una descrizione indefinita è una frase del tipo “un tale”, mentre una descrizione definita è una frase del tipo “il tale” (al singolare). Iniziamo con la prima.

“Chi hai incontrato?” “Ho incontrato un uomo.” “Questa è una descrizione molto vaga.” Non ci stiamo quindi discostando dall’uso comune nella nostra terminologia. La nostra domanda è: cosa affermo realmente quando affermo “Ho incontrato un uomo”? Supponiamo, per un momento, che la mia affermazione sia vera e che in effetti io abbia incontrato Jones. È chiaro che ciò che affermo *non* è “Ho incontrato Jones”. Potrei dire “Ho incontrato un uomo, ma non era Jones”; in tal caso, anche se mento, non mi contraddico, come farei se quando dico di aver

incontrato un uomo intendessi in realtà dire di aver incontrato Jones. È chiaro anche che la persona con cui sto parlando può capire ciò che dico, anche se è straniera e non ha mai sentito parlare di Jones.

Ma possiamo spingerci oltre: non solo Jones, ma nessun uomo reale, entra nella mia affermazione. Ciò diventa evidente quando l'affermazione è falsa, poiché in tal caso non c'è più motivo per cui Jones dovrebbe essere considerato parte della proposizione di quanto lo sarebbe chiunque altro. Anzi, l'affermazione rimarrebbe significativa, sebbene non potrebbe essere vera, anche se non ci fosse alcun uomo. "Ho incontrato un unicorno" o "Ho incontrato un serpente marino" è un'asserzione perfettamente significativa, se sappiamo cosa significherebbe essere un unicorno o un serpente marino, *ovvero* qual è la definizione di questi mostri favolosi. Pertanto, è solo ciò che possiamo chiamare *concetto* che entra nella proposizione. Nel caso di "unicorno", ad esempio, c'è solo il concetto: non c'è anche, da qualche parte tra le sfumature, qualcosa di irreale che possa essere chiamato "unicorno". Quindi, poiché è significativo (sebbene falso) dire "Ho incontrato un unicorno", è chiaro che questa proposizione, analizzata correttamente, non contiene un costituente "un unicorno", sebbene contenga il concetto di "unicorno".

La questione dell'"irrealtà", che ci si presenta a questo punto, è molto importante. Tratti in inganno dalla grammatica, la grande maggioranza dei logici che si sono occupati di questa questione l'hanno affrontata in modo errato. Hanno considerato la forma

grammaticale come una guida più sicura nell'analisi di quanto non sia in realtà. E non hanno saputo quali differenze nella forma grammaticale siano importanti. "Ho incontrato Jones" e "Ho incontrato un uomo" sarebbero tradizionalmente considerate proposizioni della stessa forma, ma in realtà sono di forme piuttosto diverse : la prima nomina una persona reale, Jones; mentre la seconda implica una funzione proposizionale e diventa, quando esplicitata: "La funzione 'Ho incontrato *x* e *x* è umano' è talvolta vera". (Si ricorderà che abbiamo adottato la convenzione di usare "talvolta" come non implicante più di una volta.) Questa proposizione non è ovviamente della forma "Ho incontrato *x* ", che rappresenta | per l'esistenza della proposizione “Ho incontrato un unicorno” nonostante il fatto che non esista una cosa come “un unicorno”.

Per mancanza dell'apparato delle funzioni proposizionali, molti logici sono stati indotti alla conclusione che esistano oggetti irreali. Si sostiene, *ad esempio* , da Meinong, [36] che possiamo parlare di “la montagna d’oro”, “il quadrato rotondo”, e così via; possiamo formulare proposizioni vere di cui questi sono i soggetti; quindi devono avere una qualche forma di esistenza logica, poiché altrimenti le proposizioni in cui compaiono sarebbero prive di significato. In tali teorie, mi sembra, vi è una mancanza di quel senso della realtà che dovrebbe essere preservato anche negli studi più astratti. La logica, a mio avviso, non deve ammettere un unicorno più di quanto non possa farlo la zoologia; perché la logica si occupa del mondo reale tanto quanto la zoologia, sebbene con le sue caratteristiche più astratte e generali.

Affermare che gli unicorni esistano nell'araldica, o nella letteratura, o nell'immaginazione, è una fuga pietosa e meschina. Ciò che esiste nell'araldica non è un animale, fatto di carne e sangue, che si muove e respira di propria iniziativa. Ciò che esiste è un'immagine, o una descrizione a parole. Allo stesso modo, sostenere che Amleto, ad esempio, esista nel suo mondo, vale a dire nel mondo dell'immaginazione di Shakespeare, con la stessa veridicità con cui (per esempio) Napoleone esisteva nel mondo ordinario, significa dire qualcosa di deliberatamente confuso, o comunque confuso a un livello quasi incredibile. Esiste un solo mondo, il mondo "reale": l'immaginazione di Shakespeare ne fa parte, e i pensieri che ebbe nello scrivere Amleto sono reali. Così come lo sono i pensieri che abbiamo noi leggendo l'opera. Ma è dell'essenza stessa della finzione che solo i pensieri, i sentimenti, ecc., di Shakespeare e dei suoi lettori siano reali, e che non esista, oltre a questi, un Amleto oggettivo. Quando si prendono in considerazione tutti i sentimenti suscitati da Napoleone negli scrittori e nei lettori di storia, non si è toccato l'uomo reale; ma nel caso di Amleto si è giunti alla sua fine. Se nessuno pensasse ad Amleto, non rimarrebbe nulla di lui; Se nessuno avesse pensato a Napoleone nel 1700 , si sarebbe presto assicurato che qualcuno lo facesse. Il senso della realtà è vitale nella logica, e chiunque lo manipoli fingendo che Amleto abbia un altro tipo di realtà rende un cattivo servizio al pensiero. Un solido senso della realtà è assolutamente necessario per formulare un'analisi corretta di proposizioni riguardanti unicorni, montagne dorate, quadrati rotondi e altri pseudo-oggetti simili.

In ossequio al senso di realtà, insisteremo sul fatto che, nell'analisi delle proposizioni, non si debba ammettere nulla di "irreale". Ma, dopotutto, se non *c'*è nulla di irreale, come potremmo, ci si potrebbe chiedere, *ammettere* qualcosa di irreale? La risposta è che, quando trattiamo di proposizioni, abbiamo a che fare in prima istanza con simboli, e se attribuiamo significato a gruppi di simboli che non ne hanno, cadremo nell'errore di ammettere irrealtà, nell'unico senso in cui ciò è possibile, ovvero come oggetti descritti. Nella proposizione "Ho incontrato un unicorno", tutte e quattro le parole insieme costituiscono una proposizione significativa, e la parola "unicorno" di per sé è significativa, esattamente nello stesso senso della parola "uomo". Ma le *due* parole "un unicorno" non formano un gruppo subordinato con un significato proprio. Pertanto, se attribuiamo erroneamente un significato a queste due parole, ci ritroviamo con "un unicorno" e con il problema di come possa esistere una cosa del genere in un mondo in cui non ci sono unicorni. “Un unicorno” è una descrizione indefinita che non descrive nulla. Non è una descrizione indefinita che descrive qualcosa di irreale. Una proposizione come “ *x* è irreale” ha significato solo quando “ *x* ” è una descrizione, definita o indefinita; in tal caso la proposizione sarà vera se “ *x* ” è una descrizione che non descrive nulla. Ma sia che la descrizione “ *x* ” descriva qualcosa o nulla, in ogni caso non è un costituente della proposizione in cui compare; come “un unicorno” poco fa, non è un gruppo subordinato che ha un significato proprio. Tutto ciò deriva dal fatto che, quando “ x ” è una descrizione, “ *x* è irreale” o

“ *x* non esiste” non è un nonsenso, ma è sempre significativo e talvolta vero.

Possiamo ora procedere a definire in generale il significato 171 delle proposizioni che contengono descrizioni ambigue. Supponiamo di voler fare un'affermazione su "un tale", dove "tale e tale" sono quegli oggetti che hanno una certa proprietà ϕ , *ovvero* quegli oggetti *x* per i quali la funzione proposizionale ϕx è vera. (*Ad esempio* , se prendiamo "un uomo" come esempio di "un tale", ϕx sarà " *x* è umano"). Supponiamo ora di voler affermare la proprietà ψ di "un tale", *ovvero* vogliamo affermare che "un tale" ha quella proprietà che *x* ha quando ψx è vera. (*Ad esempio,* nel caso di "Ho incontrato un uomo", ψx sarà "Ho incontrato *x* "). Ora, la proposizione che "un tale" ha la proprietà ψ *non* è una proposizione della forma " ψx ". Se così fosse, “un tale e tale” dovrebbe essere identico a *x per un x* adatto ; e sebbene (in un certo senso) ciò possa essere vero in alcuni casi, non è certamente vero in un caso simile.

come “un unicorno”. È proprio questo fatto, che l’affermazione che un tale abbia la proprietà ψ non è della forma ψx , che rende possibile che “un tale” sia, in un certo senso chiaramente definibile, “irreale”. La definizione è la seguente:

L'affermazione che “un oggetto avente la proprietà ϕ ha anche la proprietà ψ ” significa:

“L’affermazione congiunta di ϕx e ψx non è sempre falsa.”

Dal punto di vista logico, questa è la stessa proposizione che potrebbe essere espressa con "alcuni ϕ sono ψ "; ma retoricamente c'è una differenza , perché in un caso si suggerisce una singolarità, nell'altro una pluralità. Questo, tuttavia, non è il punto importante. Il punto importante è che, se analizzate correttamente, le proposizioni verbali riguardanti "un tale" risultano non contenere alcun costituente rappresentato da questa espressione. Ed è per questo che tali proposizioni possono essere significative anche quando non esiste un tale.

La definizione di *esistenza* , applicata alle descrizioni ambigue, deriva da quanto detto alla fine del capitolo precedente. Diciamo che "gli uomini esistono" o "un uomo esiste" se la funzione proposizionale " x *è* umano" è talvolta vera; e in generale "un tale" esiste se " *x* è tale" è talvolta vera. Possiamo esprimere questo concetto in un altro linguaggio. La proposizione "Socrate è un uomo" è senza dubbio equivalente *a* "Socrate è umano", ma non è la stessa identica proposizione. L' *essere* di "Socrate è umano" esprime la relazione tra soggetto e predicato; l' *essere* di "Socrate è un uomo" esprime l'identità. È una vergogna per il genere umano aver scelto di impiegare la stessa parola "essere" per queste due idee completamente diverse , una vergogna che un linguaggio logico simbolico ovviamente risolve. L'identità in "Socrate è un uomo" è l'identità tra un oggetto nominato (accettando "Socrate" come nome, fatte salve le qualificazioni spiegate in seguito) e un oggetto descritto in modo ambiguo. Un oggetto descritto in modo ambiguo "esiste" quando almeno una di queste proposizioni è vera, *cioè* quando esiste almeno una proposizione vera della

forma " *x* è tale e tale", dove " *x* " è un nome. È caratteristico delle descrizioni ambigue (a differenza di quelle definite) che possano esistere un numero qualsiasi di proposizioni vere della forma sopra indicata: Socrate è un uomo, Platone è un uomo, ecc. Quindi "un uomo esiste" deriva da Socrate, o Platone, o chiunque altro. Con le descrizioni definite, d'altra parte, la corrispondente

La forma di proposizione, ovvero " *x* è tale e tale" (dove " *x* " è un nome), può essere vera al massimo per un solo valore di *x* . Questo ci porta all'argomento delle descrizioni definite, che vanno definite in modo analogo a quello impiegato per le descrizioni ambigue, ma in maniera più complessa.

Passiamo ora all'argomento principale di questo capitolo, ovvero la definizione dell'articolo determinativo " il / la / lo Tuttavia, quando avremo enumerato tutti gli uomini del mondo, non rimarrà nulla di cui potremo dire: "Questo è un uomo, e non solo, ma è *l* '«uomo», l'entità per eccellenza che è semplicemente un uomo indefinito senza essere nessuno in particolare". È ovviamente abbastanza chiaro

che tutto ciò che esiste nel mondo è definito: se è un uomo, è un uomo definito e non un altro. Pertanto non può esistere un'entità come "un uomo" da trovare nel mondo, in contrapposizione a uomini specifici . E di conseguenza è naturale che non definiamo "un uomo" in sé, ma solo le proposizioni in cui compare.

Nel caso di “tale e talaltro” ciò è ugualmente vero, sebbene a prima vista meno ovvio. Possiamo dimostrare che deve essere

così, considerando la differenza tra un *nome* e una *descrizione definita* . Prendiamo la proposizione: “Scott è l’autore di *Waverley* ”. Qui abbiamo un nome, “Scott”, e una descrizione, “l’autore di *Waverley* ”, che si afferma si riferiscano alla stessa persona. La distinzione tra un nome e tutti gli altri simboli può essere spiegata come segue:

Un nome è un simbolo semplice il cui significato è qualcosa che può verificarsi solo come soggetto, *ovvero* qualcosa del tipo che, nel Capitolo XIII, abbiamo definito come "individuo" o "particolare". E un simbolo "semplice" è quello che non ha parti che siano simboli. Quindi "Scott" è un simbolo semplice, perché, sebbene abbia delle parti (vale a dire, lettere separate), queste parti non sono simboli. D'altra parte, "l'autore di *Waverley* " non è un simbolo semplice, perché le singole parole che compongono la frase sono parti che sono simboli. Se, come può accadere, qualunque cosa *sembri* essere un "individuo" è in realtà suscettibile di ulteriore analisi, dovremo accontentarci di ciò che potremmo chiamare "individui relativi", che saranno termini che, nell'intero contesto in questione, non vengono mai analizzati e non compaiono mai se non come soggetti. E in tal caso dovremo di conseguenza accontentarci di "nomi relativi". Dal punto di vista del nostro problema attuale, ovvero la definizione di descrizioni, questo problema, se si tratti di nomi assoluti o solo relativi, può essere ignorato, poiché riguarda diversi stadi nella gerarchia dei "tipi", mentre noi dobbiamo confrontare coppie come "Scott" e "l'autore di *Waverley* ", che si riferiscono entrambe allo stesso oggetto e non sollevano il problema dei tipi. Possiamo quindi, per

il momento, considerare i nomi come potenzialmente assoluti; nulla di ciò che diremo dipenderà da questa ipotesi, ma la formulazione potrebbe risultarne un po' abbreviata.

Abbiamo dunque due cose da confrontare: (1) un *nome* , che è un simbolo semplice, che designa direttamente un individuo, e questo è il suo significato, e ha questo significato di per sé, indipendentemente dal significato di tutte le altre parole; (2) una *descrizione* , che consiste di diverse parole, i cui significati sono già fissati, e da cui deriva ciò che deve essere inteso come il "significato" della descrizione.

Una proposizione contenente una descrizione non è identica a ciò che quella proposizione diventa quando viene sostituito un nome, anche se il nome designa lo stesso oggetto descritto nella descrizione. "Scott è l'autore di *Waverley* " è ovviamente una proposizione diversa da "Scott è Scott": la prima è un fatto nella storia letteraria, la seconda una banale verità. E se mettessimo chiunque altro al posto di "l'autore di *Waverley* ", la nostra proposizione diventerebbe falsa e quindi certamente non sarebbe più la stessa proposizione. Ma, si potrebbe dire, la nostra proposizione è essenzialmente della stessa forma di (diciamo) "Scott è Sir Walter", in cui si dice che due nomi si riferiscono alla stessa persona. La risposta è che, se "Scott è Sir Walter" significa davvero "la persona di nome 'Scott' è la persona di nome 'Sir Walter'", allora i nomi vengono usati come descrizioni: *cioè* l'individuo, invece di essere nominato, viene descritto come la persona che ha quel nome. Questo è un modo in cui i nomi

vengono spesso usati . In pratica, e di norma non ci sarà nulla nella fraseologia che mostri se vengono usati in questo modo o *come* nomi. Quando un nome viene usato direttamente, semplicemente per indicare di cosa stiamo parlando, non fa parte del *fatto* asserito, né della falsità se la nostra affermazione risulta essere falsa: è semplicemente parte del simbolismo con cui esprimiamo il nostro pensiero. Ciò che vogliamo esprimere è qualcosa che potrebbe (ad esempio) essere tradotto in una lingua straniera; è qualcosa per cui le parole effettive sono veicolo, ma di cui non fanno parte. D'altra parte, quando facciamo una proposizione su "la persona chiamata 'Scott'", il nome effettivo "Scott" entra in ciò che stiamo affermando, e non semplicemente nel linguaggio usato per fare l'affermazione. La nostra proposizione sarà diversa se sostituiamo "la persona chiamata 'Sir Walter'". Ma finché usiamo i nomi *come* tali, dire "Scott" o "Sir Walter" è irrilevante per ciò che stiamo affermando, così come parlare inglese o francese. Pertanto, finché i nomi sono usati *come* tali, "Scott è Sir Walter" è la stessa proposizione banale di "Scott è Scott". Questo completa la dimostrazione che "Scott è l'autore di *Waverley* " non è la stessa proposizione che si ottiene sostituendo un nome a "l'autore di *Waverley* ", indipendentemente dal nome utilizzato.

Quando usiamo una variabile e parliamo di una funzione proposizionale, diciamo *ϕx , il processo di applicazione di* affermazioni generali su *ϕx* a casi particolari consisterà nel sostituire un nome alla lettera " *x* ", supponendo che *ϕ* sia una funzione che ha individui come argomenti. Supponiamo, ad

esempio, che ϕx sia "sempre vera"; sia, diciamo, la "legge di identità", $x = x$. Allora possiamo sostituire " x " con qualsiasi nome scegliamo e otterremo una proposizione vera. Supponendo per un momento che "Socrate", "Platone" e "Aristotele" siano nomi (un'ipotesi molto azzardata), possiamo dedurre dalla legge di identità che Socrate è Socrate, Platone è Platone e Aristotele è Aristotele. Ma commetteremmo una fallacia se tentassimo di dedurre, senza ulteriori premesse, che l'autore di *Waverley* è l'autore di *Waverley* . Questo porta a | Da quanto abbiamo appena dimostrato in 166 , se sostituiamo un nome a “l’autore di *Waverley* ” in una proposizione, la proposizione che otteniamo è diversa . Vale a dire, applicando il risultato al nostro caso attuale: se “ x ” è un nome, “ $x = x$ ” non è la stessa proposizione di “l’autore di *Waverley* è l’autore di *Waverley* ”, indipendentemente da quale nome “ x ” possa essere. Quindi dal fatto che tutte le proposizioni della forma “ $x = x$ ” sono vere non possiamo dedurre, senza ulteriori indugi, che l’autore di *Waverley* è l’autore di *Waverley* . Infatti, le proposizioni della forma “il tale è il tale” non sono sempre vere: è necessario

che tale cosa debba *esistere* (un termine che verrà spiegato a breve). È falso che l'attuale Re di Francia sia l'attuale Re di Francia, o che il quadrato rotondo sia il quadrato rotondo. Quando sostituiamo una descrizione a un nome, le funzioni proposizionali che sono "sempre vere" possono diventare false, se la descrizione non descrive nulla. Non c'è alcun mistero in questo non appena ci rendiamo conto (come dimostrato nel paragrafo precedente) che

quando sostituiamo una descrizione il risultato non è un valore della funzione proposizionale in questione.

Siamo ora in grado di definire le proposizioni in cui compare una descrizione definita. L'unica cosa che distingue "tale e tale" da "un tale e tale" è l'implicazione di unicità. Non possiamo parlare di " *l'* abitante di Londra", perché abitare a Londra è un attributo che non è unico. Non possiamo parlare di "l'attuale re di Francia", perché non ce n'è uno; ma possiamo parlare di "l'attuale re d'Inghilterra". Pertanto, le proposizioni riguardanti "tale e tale" implicano sempre le corrispondenti proposizioni riguardanti "un tale e tale", con l'aggiunta che non esiste più di un tale e tale. Una proposizione come "Scott è l'autore di *Waverley* " non potrebbe essere vera se *Waverley* non fosse mai stato scritto, o se fosse stato scritto da più persone; e non potrebbe esserlo nemmeno qualsiasi altra proposizione derivante da una funzione proposizionale ϕx mediante la sostituzione di "l'autore di *Waverley* " a " *x* ". Possiamo dire che “l’autore di *Waverley* ” significa “il valore di *x* per cui ' *x* ha scritto | *Waverley* ' è vero”. 177 Pertanto, la proposizione “l’autore di *Waverley* era Scotch”, ad esempio, implica:

(1) “ *x* ha scritto *Waverley* ” non è sempre falso;

(2) “se *x* e *y* hanno scritto *Waverley* , *x* e *y* sono identici” è sempre vero;

(3) “se *x* ha scritto *Waverley* , *x* era Scotch” è sempre vero.

Queste tre proposizioni, tradotte in linguaggio ordinario, affermano:

(1) almeno una persona ha scritto *Waverley* ; (2) al massimo una persona ha scritto *Waverley* ; (3) chiunque abbia scritto *Waverley* era scozzese.

Tutti e tre questi elementi sono impliciti nell'affermazione "l'autore di *Waverley* era scozzese". Viceversa, i tre elementi insieme (ma non due di essi) implicano che l'autore di *Waverley* fosse scozzese. Pertanto, i tre elementi insieme possono essere considerati come la definizione di ciò che si intende con la proposizione "l'autore di *Waverley* era scozzese".

Possiamo semplificare in qualche modo queste tre proposizioni. La prima e la seconda insieme sono equivalenti a: "Esiste un termine *c* tale che ' *x* ha scritto *Waverley* ' è vero quando *x* è *c* ed è falso quando *x* non è *c* ". In altre parole, "Esiste un termine *c* tale che ' *x* ha scritto *Waverley* ' è sempre equivalente a *'x* è *c* '". (Due proposizioni sono "equivalenti" quando entrambe sono vere o entrambe sono false.) Abbiamo qui, per cominciare, due funzioni di *x* , " *x* ha scritto *Waverley* " e " *x* è *c* ", e formiamo una funzione di *c* considerando l'equivalenza di queste due funzioni di *x* per tutti i valori di *x* ; procediamo quindi ad affermare che la funzione risultante di *c* è "talvolta vera", *cioè* che è vera per almeno un valore di *c* . (Ovviamente non può essere vera per più di un valore di *c* .) Queste due condizioni insieme sono definite come il significato di "l'autore di *Waverley* esiste".

Possiamo ora definire “il termine che soddisfa la funzione *ϕx* esiste”. Questa è la forma generale di cui quanto sopra è un caso particolare. “L’autore di *Waverley* ” è “il termine che soddisfa la funzione *’x* ha scritto *Waverley* .’” E “il tale e tale” implicherà sempre un riferimento a una qualche funzione proposizionale, vale a dire quella che definisce la proprietà che rende una cosa tale e tale. La nostra definizione è la seguente:

“Esiste il termine che soddisfa la funzione *ϕx* ” significa:

“Esiste un termine *c* tale che *ϕx* è sempre equivalente-

prestato a ' *x* è *c* .’”

Per definire “l’autore di *Waverley* era scozzese”, dobbiamo ancora tenere conto della terza delle nostre tre proposizioni, ovvero “Chiunque abbia scritto *Waverley* era scozzese”. Questa condizione sarà soddisfatta semplicemente aggiungendo che la *c* in questione deve essere scozzese. Pertanto “l’autore di *Waverley* era scozzese” è:

“Esiste un termine *c* tale che (1) ' *x* ha scritto *Waverley* ' è sempre equivalente a *'x* è *c* ', (2) *c* è Scotch.”

E in generale: “il termine che soddisfa *ϕx* soddisfa *ψx* ” è definito come:

“Esiste un termine *c* tale che (1) *ϕx* è sempre equivalente a ' *x* è *c'* ,' (2) *ψ c* è vero.”

Questa è la definizione di proposizioni in cui compaiono descrizioni.

È possibile avere molta conoscenza riguardo a un termine descritto, *cioè* conoscere molte proposizioni riguardanti "tale e tale", senza in realtà sapere cosa sia tale e tale, *cioè* senza conoscere alcuna proposizione della forma " *x* è tale e tale", dove " *x* " è un nome. In un romanzo giallo si accumulano proposizioni su "l'uomo che ha commesso il delitto", nella speranza che alla fine siano sufficienti a dimostrare che è stato A a commettere il delitto. Possiamo persino spingerci a dire che, in tutta la conoscenza che può essere espressa a parole – con l'eccezione di "questo" e "quello" e di poche altre parole il cui significato varia a seconda delle occasioni – non compaiono nomi, in senso stretto, ma ciò che sembra un nome è in realtà una descrizione. Possiamo indagare in modo significativo se Omero sia esistito, cosa che non potremmo fare se "Omero" fosse un nome. La proposizione "tale e tale esiste" è significativa, sia che sia vera o falsa; ma se *a* è tale e tale (dove " *a* " è un nome), le parole " *a* esiste" sono prive di significato. È solo delle descrizioni , definite o indefinite, che l'esistenza può essere affermata in modo significativo ; infatti, se " *a* " è un nome, *deve* nominare qualcosa: ciò che non nomina nulla non è un nome e, pertanto, se inteso come nome, è un simbolo privo di significato, mentre una descrizione, come "l'attuale re di Francia", non diventa incapace di verificarsi in modo significativo solo perché non descrive nulla, poiché si tratta di un simbolo *complesso* , il cui significato deriva da quello dei suoi simboli costituenti. E così, quando ci chiediamo se Omero sia esistito,

stiamo usando la parola "Omero" come una descrizione abbreviata: possiamo sostituirla con (ad esempio) "l'autore dell'Iliade *e* dell'Odissea ″ . Le stesse considerazioni si applicano a quasi tutti gli usi di quelli che sembrano nomi propri.

Quando le descrizioni compaiono nelle proposizioni, è necessario distinguere ciò che si può definire occorrenza "primaria" e "secondaria". La distinzione astratta è la seguente. Una descrizione ha un'occorrenza "primaria" quando la proposizione in cui compare deriva dalla sostituzione della descrizione a " *x* " in una qualche funzione proposizionale *ϕx* ; una descrizione ha un'occorrenza "secondaria" quando il risultato della sostituzione della descrizione a *x* in *ϕx* fornisce solo *una parte* della proposizione in questione. Un esempio chiarirà meglio questo concetto. Consideriamo "l'attuale Re di Francia è calvo". Qui "l'attuale Re di Francia" ha un'occorrenza primaria e la proposizione è falsa. Ogni proposizione in cui una descrizione che non descrive nulla ha un'occorrenza primaria è falsa. Ma ora consideriamo "l'attuale Re di Francia non è calvo". Questa è ambigua. Se consideriamo prima " *x* è calvo", poi sostituiamo "l'attuale Re di Francia" a " *x* " e infine neghiamo il risultato, l'occorrenza di "l'attuale Re di Francia" è secondaria e la nostra proposizione è vera; Ma se prendiamo “ *x* non è calvo” e sostituiamo “l’attuale re di Francia” a “ *x* ”, allora “l’attuale re di Francia” ha un’occorrenza primaria e la proposizione è falsa. La confusione tra occorrenze primarie e secondarie è una facile fonte di fallacie quando si tratta di descrizioni .

In matematica, le descrizioni si presentano principalmente nella forma 180 di *funzioni descrittive* , *ovvero* "il termine avente la relazione R con *y* ", o "l'R di *y* ", come potremmo dire, per analogia con "il padre di *y* " e frasi simili. Dire "il padre di *y* è ricco", ad esempio, significa affermare che la seguente funzione proposizionale di *c* : " *c* è ricco e *'x* ha generato *y* ' è sempre equivalente a ' *x* è *c* '", è "talvolta vera", *cioè* è vera per almeno un valore di *c* . Ovviamente non può essere vera per più di un valore.

La teoria delle descrizioni, brevemente delineata in questo capitolo, è di fondamentale importanza sia per la logica che per la teoria della conoscenza. Tuttavia, ai fini della matematica, gli aspetti più filosofici della teoria non sono essenziali e sono stati pertanto omessi nella trattazione precedente, che si è limitata ai requisiti matematici minimi.

Capitolo XVII Classes

Nel presente capitolo ci occuperemo di 181 *al* plurale: gli abitanti di Londra, i figli di uomini ricchi e così via. In altre parole, ci occuperemo di *classi* . Abbiamo visto nel Capitolo II che un numero cardinale deve essere definito come una classe di classi, e nel Capitolo III che il numero 1 deve essere definito come la classe di tutte le classi unitarie, *cioè* di tutte quelle che hanno un solo membro, come diremmo se non fosse per il circolo vizioso. Naturalmente, quando il numero 1 è definito come la classe di tutte le classi unitarie, le "classi unitarie" devono essere definite in modo da non presupporre che sappiamo cosa si intende per "uno"; infatti, sono definite in un modo strettamente analogo a quello usato per le descrizioni, vale a dire: una classe α si dice "classe unitaria" se la funzione proposizionale "' x è un α ' è sempre equivalente a ' x è c '" (considerata come una funzione di c).

Non è sempre falso, *cioè* , in un linguaggio più ordinario, se esiste un termine c tale che x sarà un membro di α quando x è c ma non altrimenti. Questo ci fornisce una definizione di classe unitaria se sappiamo già cosa sia una classe in generale. Finora, trattando l'aritmetica, abbiamo considerato "classe" come un'idea primitiva. Ma, per le ragioni esposte nel Capitolo XIII, se non per altre, non possiamo accettare "classe" come un'idea primitiva. Dobbiamo cercare una definizione sulla stessa linea della definizione di descrizione, *cioè* una definizione che attribuisca un significato alle proposizioni nella cui espressione verbale o

simbolica compaiono parole o simboli che apparentemente rappresentano classi, ma che attribuisca un significato che elimini completamente ogni menzione di classi da una corretta analisi di tali proposizioni. Potremo quindi affermare 182 che i simboli per le classi sono semplici convenienze, non rappresentano oggetti chiamati “classi”, e che le classi sono in realtà, come le descrizioni, finzioni logiche o (come diciamo) “simboli incompleti”.

La teoria delle classi è meno completa della teoria delle descrizioni, e ci sono ragioni (che abbozzeremo) per considerare la definizione di classi che proporremo non del tutto soddisfacente. Sembra necessaria un'ulteriore precisazione; ma le ragioni per considerare la definizione che offriremo approssimativamente corretta e sulla strada giusta sono schiaccianti.

La prima cosa da fare è capire perché le classi non possono essere considerate parte dell'arredamento ultimo del mondo. È difficile spiegare con precisione cosa si intenda con questa affermazione, ma una conseguenza che essa implica può essere usata per chiarirne il significato. Se avessimo un linguaggio simbolico completo, con una definizione per tutto ciò che è definibile e un simbolo non definito per tutto ciò che è indefinibile, i simboli non definiti in questo linguaggio rappresenterebbero simbolicamente ciò che intendo con "l'arredamento ultimo del mondo". Sostengo che nessun simbolo, né per la "classe" in generale né per classi particolari, sarebbe incluso in questo

apparato di simboli non definiti. D'altra parte, tutte le cose particolari che esistono nel mondo dovrebbero avere dei nomi che sarebbero inclusi tra i simboli non definiti. Potremmo cercare di evitare questa conclusione usando le descrizioni. Prendiamo (per esempio) "l'ultima cosa che Cesare vide prima di morire". Questa è la descrizione di qualcosa di particolare; potremmo usarla come (in un senso perfettamente legittimo) una *definizione* di quel particolare. Ma se " *a* " è un *nome* per lo stesso particolare, una proposizione in cui compare " *a* " non è (come abbiamo visto nel capitolo precedente) identica a ciò che questa proposizione diventa quando a " *a* " sostituiamo "l'ultima cosa che Cesare vide prima di morire". Se il nostro linguaggio non contiene il nome " *a* ", o qualche altro nome per lo stesso particolare, non avremo alcun mezzo per esprimere la proposizione che abbiamo espresso per mezzo di " *a* " in contrapposizione a quella che abbiamo espresso per mezzo della descrizione. Pertanto, 183 descrizioni non consentirebbero a un linguaggio perfetto di fare a meno dei nomi per tutti i particolari. A questo proposito, sosteniamo che le classi differiscono dai particolari e non devono essere rappresentate da simboli non definiti. Il nostro primo compito è quello di fornire le ragioni di questa opinione.

Abbiamo già visto che le classi non possono essere considerate una specie di individui, a causa della contraddizione relativa alle classi che non sono membri di se stesse (spiegata nel Capitolo XIII), e perché possiamo dimostrare che il numero delle classi è maggiore del numero degli individui.

Non possiamo considerare le classi in senso *puramente* estensionale come semplici cumuli o conglomerati. Se provassimo a farlo, ci risulterebbe impossibile comprendere come possa esistere una classe come la classe nulla, che non ha alcun membro e non può essere considerata un "cumulo"; ci risulterebbe inoltre molto difficile comprendere come mai una classe che ha un solo membro non sia identica a quel singolo membro. Non intendo affermare, né negare, l'esistenza di entità come i "cumuli". In quanto logico matematico, non sono chiamato a esprimere un'opinione su questo punto. Tutto ciò che sostengo è che, se esistono entità come i cumuli, non possiamo identificarle con le classi composte dai loro costituenti.

Ci avvicineremo molto di più a una teoria soddisfacente se cercheremo di identificare le classi con funzioni proposizionali. Ogni classe, come abbiamo spiegato nel Capitolo II, è definita da una funzione proposizionale che è vera per i membri della classe e falsa per altre cose. Ma se una classe può essere definita da una funzione proposizionale, può essere definita altrettanto bene da qualsiasi altra che sia vera quando la prima è vera e falsa quando la prima è falsa. Per questo motivo la classe non può essere identificata con una qualsiasi di queste funzioni proposizionali piuttosto che con qualsiasi altra, e data una funzione proposizionale, ce ne sono sempre molte altre che sono vere quando è vera e false quando è falsa. Diciamo che due funzioni proposizionali sono "formalmente equivalenti" quando ciò accade. Due *proposizioni* sono " equivalenti" 184 quando

entrambe sono vere o entrambe false; due funzioni proposizionali ϕx , ψx sono "formalmente equivalenti" quando

ϕx è sempre equivalente a ψx . È il fatto che esistano altre funzioni formalmente equivalenti a una data funzione che rende impossibile identificare una classe con una funzione; infatti, desideriamo che le classi siano tali che non esistano due classi distinte con esattamente gli stessi membri, e quindi due funzioni formalmente equivalenti dovranno determinare la stessa classe.

Quando abbiamo deciso che le classi non possono essere cose dello stesso tipo dei loro membri, che non possono essere semplicemente mucchi o aggregati, e anche che non possono essere identificate con funzioni proposizionali, diventa molto difficile vedere cosa possono essere, se devono essere più che finzioni simboliche. E se riusciamo a trovare un modo per trattarle come finzioni simboliche, aumentiamo la sicurezza logica della nostra posizione, poiché evitiamo la necessità di presupporre che ci siano classi senza essere costretti a fare il presupposto opposto che non ci siano classi. Ci asteniamo semplicemente da entrambi i presupposti. Questo è un esempio del rasoio di Occam, vale a dire: "le entità non vanno moltiplicate senza necessità". Ma quando ci rifiutiamo di affermare che ci sono classi, non dobbiamo supporre che stiamo affermando dogmaticamente che non ce ne sono. Siamo semplicemente agnostici al riguardo: come Laplace, possiamo dire: " *je n'ai pas besoin de cette ipotesi`* .”

Elenchiamo le condizioni che un simbolo deve soddisfare per poter fungere da classe. Ritengo che le seguenti condizioni si riveleranno necessarie e sufficienti :

(1) Ogni funzione proposizionale deve determinare una classe, costituita da quegli argomenti per i quali la funzione è vera. Data una qualsiasi proposizione (vera o falsa), diciamo su Socrate, possiamo immaginare Socrate sostituito da Platone o Aristotele o un gorilla o l'uomo sulla luna o qualsiasi altro individuo al mondo. In generale, alcune di queste sostituzioni daranno una proposizione vera e altre una falsa. La classe determinata sarà costituita da tutte quelle sostituzioni che danno una proposizione vera. Naturalmente, dobbiamo ancora decidere cosa intendiamo per "tutte quelle per cui, ecc.". Tutto ciò che stiamo osservando al momento è che una classe è resa determinata da una funzione proposizionale e che ogni funzione proposizionale determina una classe appropriata.

(2) Due funzioni proposizionali formalmente equivalenti devono determinare la stessa classe, e due funzioni non formalmente equivalenti devono determinare classi diverse . Ovvero, una classe è determinata dalla sua appartenenza, e non possono esistere due classi diverse con la stessa appartenenza. (Se una classe è determinata da una funzione ϕx , diciamo che a è un "membro" della classe se ϕa è vera.)

(3) Dobbiamo trovare un modo per definire non solo le classi, ma anche le classi di classi. Abbiamo visto nel Capitolo II che i numeri cardinali devono essere definiti come classi di classi. La

frase comune della matematica elementare, "Le combinazioni di *n* elementi *m* alla volta", rappresenta una classe di classi, ovvero la classe di tutte le classi di *m* termini che possono essere selezionate da una data classe di *n* termini. Senza un metodo simbolico per trattare le classi di classi, la logica matematica crollerebbe.

(4) In ogni circostanza deve essere privo di senso (non falso) supporre che una classe sia membro di se stessa o non lo sia. Ciò deriva dalla contraddizione che abbiamo discusso nel Capitolo XIII.

(5) Infine, e questa è la condizione più difficile da soddisfare, deve essere possibile formulare proposizioni su *tutte* le classi composte da individui, o su *tutte* le classi composte da oggetti di un qualsiasi "tipo" logico. Se così non fosse, molti usi delle classi risulterebbero fuorvianti, ad esempio l'induzione matematica. Nel definire la posterità di un dato termine, dobbiamo essere in grado di affermare che un membro della posterità appartiene a *tutte* le classi ereditarie a cui appartiene il termine dato, e ciò richiede il tipo di totalità in questione. La difficoltà nel soddisfare questa condizione risiede nel fatto che si può dimostrare l'impossibilità di parlare di *tutte* le funzioni proposizionali che possono avere argomenti di un dato tipo.

Inizieremo ignorando quest'ultima condizione e i problemi che essa solleva. Le prime due condizioni possono essere considerate insieme. Esse affermano che deve esistere una sola classe, né più né meno, per ogni gruppo di funzioni proposizionali formalmente

equivalenti; *ad esempio,* la classe degli uomini deve essere la stessa di quella dei bipedi senza piume, degli animali razionali, degli Yahoo o di qualsiasi altra caratteristica si possa preferire per definire un essere umano. Ora, quando diciamo che due funzioni proposizionali formalmente equivalenti possono non essere identiche, sebbene definiscano la stessa classe, possiamo dimostrare la verità dell'asserzione sottolineando che un'affermazione può essere vera per una funzione e falsa per l'altra; *ad esempio,* "Credo che tutti gli uomini siano mortali" può essere vero, mentre "Credo che tutti gli animali razionali siano mortali" può essere falso, poiché potrei credere erroneamente che la Fenice sia un animale razionale immortale. Siamo quindi portati a considerare *affermazioni sulle funzioni* , o (più correttamente) *sulle funzioni delle funzioni* .

Alcune delle affermazioni che si possono fare su una funzione possono essere considerate riferite alla classe definita dalla funzione stessa, mentre altre no. L'affermazione "tutti gli uomini sono mortali" coinvolge le funzioni " *x* è umano" e " *x* è mortale"; oppure, se preferiamo, possiamo dire che coinvolge le classi *uomini* e *mortali* . Possiamo interpretare l'affermazione in entrambi i modi, perché il suo valore di verità rimane invariato se sostituiamo " *x* è umano" o " *x* è mortale" con una qualsiasi funzione formalmente equivalente. Ma, come abbiamo appena visto, l'affermazione "Credo che tutti gli uomini siano mortali" non può essere considerata riferita alla classe determinata da nessuna delle due funzioni, perché il suo valore di verità può essere modificato dalla sostituzione con una funzione

formalmente equivalente (che lascia la classe invariata). Chiameremo un'affermazione che coinvolge una funzione ϕx una funzione "estensionale" della funzione ϕx se è come "tutti gli uomini sono mortali", *cioè* se il suo valore di verità rimane invariato dalla sostituzione con una qualsiasi funzione formalmente equivalente; e quando una funzione di una funzione non è estensionale, la chiameremo “intensionale”, cosicché “credo che tutti gli uomini siano mortali” è una funzione intensionale di “ x è umano” o “ x è mortale”. Pertanto, le funzioni *estensionali* di una funzione ϕx possono, a fini pratici , essere considerate come funzioni della classe 187 determinata da ϕx , mentre le funzioni *intensionali* non possono essere considerate tali.

Va osservato che tutte le funzioni *specifiche*

Le funzioni che abbiamo occasione di introdurre nella logica matematica sono estensionali. Ad esempio, le due funzioni fondamentali delle funzioni sono: " ϕx è sempre vera" e " ϕx è talvolta vera". Il valore di verità di ciascuna di esse rimane invariato se si sostituisce a ϕx una qualsiasi funzione formalmente equivalente . Nel linguaggio delle classi, se α è la classe determinata da ϕx , " ϕx è sempre vera" è equivalente a "ogni cosa è un membro di α ", e " ϕx è talvolta vera" è equivalente a " α ha dei membri" o (meglio) " α ha almeno un membro". Consideriamo di nuovo la condizione, trattata nel capitolo precedente, per l'esistenza del "termine che soddisfa ϕx ". La condizione è che esista un termine c tale che ϕx sia sempre

equivalente a " *x* è *c* ". Questa è ovviamente estensionale. È equivalente all'affermazione che la classe definita dalla funzione ϕx è una classe unitaria, *cioè* una classe avente un solo membro; In altre parole, una classe che è membro di 1 .

Data una funzione di una funzione che può essere o non essere estensionale, possiamo sempre derivarne una funzione connessa e certamente estensionale della stessa funzione, secondo il seguente schema: Sia la nostra funzione originale di una funzione quella che attribuisce a ϕx la proprietà *f* ; allora consideriamo l'asserzione "esiste una funzione avente la proprietà *f* e formalmente equivalente a ϕx ". Questa è una funzione estensionale di ϕx ; è vera quando la nostra affermazione originale è vera, ed è formalmente equivalente alla funzione originale di ϕx se questa funzione originale è estensionale; ma quando la funzione originale è intensionale, la nuova è più spesso vera della vecchia. Ad esempio, consideriamo di nuovo "Credo che tutti gli uomini siano mortali", considerata come una funzione di " *x* è umano". La funzione estensionale derivata è: "Esiste una funzione formalmente equivalente a ' *x* è umano' e tale che credo che qualsiasi cosa la soddisfi sia mortale". Questo rimane vero quando sostituiamo " *x* è un animale razionale" | per “ *x* è umano”, anche se credo erroneamente che la Fenice sia razionale e immortale.

Alla funzione costruita come sopra, e in particolare alla funzione: "Esiste una funzione avente la proprietà *f* e formalmente

equivalente a ϕx ", diamo il nome di "funzione *estensionale* derivata " .

Possiamo considerare la funzione estensionale derivata come avente come argomento la classe determinata dalla funzione ϕx e come affermante *f* di questa classe. Ciò può essere interpretato come la definizione di una proposizione su una classe. *Ovvero,* possiamo definire:

Per affermare che “la classe determinata dalla funzione-

L'affermazione *"*ϕx ha la proprietà *f* " significa affermare che ϕx soddisfa la funzione estensionale derivata da *f* .

Ciò conferisce significato a qualsiasi affermazione su una classe che può essere fatta in modo significativo su una funzione; e si scoprirà che tecnicamente produce i risultati richiesti per rendere una teoria simbolicamente soddisfacente. [1]

Quanto abbiamo appena detto riguardo alla definizione di classi è sufficiente a soddisfare le nostre prime quattro condizioni. Il modo in cui garantisce la terza e la quarta, ovvero la possibilità di classi di classi e l'impossibilità che una classe sia o non sia membro di se stessa, è alquanto tecnico; è spiegato nei *Principia Mathematica* , ma qui può essere dato per scontato. Ne consegue che, se non fosse per la nostra quinta condizione, potremmo considerare il nostro compito concluso. Ma questa condizione – al contempo la più importante e la più difficile – non è soddisfatta in virtù di quanto abbiamo detto finora. La difficoltà è connessa alla teoria dei tipi e deve essere brevemente discussa. [2]

Abbiamo visto nel Capitolo XIII che esiste una gerarchia di tipi logici e che è un errore ammettere un

---

12 Vedi *Principia Mathematica* , vol. I, pp . 75-84 e * 20 .

Il lettore che desidera una trattazione più completa può consultare *i Principia Mathematica* , Introduzione, cap. ii; anche ∗12 .

oggetto appartenente a uno di questi da sostituire a un oggetto appartenente a un altro. | Ora non è difficile dimostrare che le varie funzioni che possono prendere un dato oggetto a *come* argomento non sono tutte dello stesso tipo. Chiamiamole tutte *a* -funzioni. Possiamo prendere prima quelle tra di esse che non implicano il riferimento ad alcuna collezione di funzioni; queste le chiameremo " *a* -funzioni predicative". Se ora procediamo con le funzioni che implicano il riferimento alla totalità delle *a* -funzioni predicative, incorreremo in una fallacia se le consideriamo dello stesso tipo delle *a* -funzioni predicative. Prendiamo un'affermazione di tutti i giorni come " *a* è un francese tipico". Come definiremmo un "francese tipico " ? Potremmo definirlo come uno "che possiede tutte le qualità possedute dalla maggior parte dei francesi". Ma a meno che non limitiamo “tutte le qualità” a quelle che non implicano un riferimento a una totalità di qualità, dovremo osservare che la maggior parte dei francesi *non* è tipica nel senso sopra indicato, e quindi la definizione mostra che non essere tipico è essenziale per un francese tipico. Questa non è

una contraddizione logica, poiché non c'è motivo per cui dovrebbero esistere francesi tipici; ma illustra la necessità di separare le qualità che implicano un riferimento a una totalità di qualità da quelle che non lo implicano.

Ogni volta che, mediante affermazioni su “tutti” o “alcuni” dei valori che una variabile può assumere in modo significativo, generiamo un nuovo oggetto, questo nuovo oggetto non deve essere tra i valori che la nostra variabile precedente poteva assumere, poiché, se lo fosse, la totalità dei valori su cui la variabile poteva variare sarebbe definibile solo in termini di se stessa, e saremmo coinvolti in un circolo vizioso. Ad esempio, se dico “Napoleone aveva tutte le qualità che fanno un grande generale”, devo definire “qualità” in modo tale che non includa ciò che sto dicendo ora, *cioè* “avere tutte le qualità che fanno un grande generale” non deve essere di per sé una qualità nel senso supposto. Questo è abbastanza ovvio, ed è il principio che porta alla teoria dei tipi mediante la quale si evitano i paradossi del circolo vizioso. Come applicato alle *funzioni* , possiamo supporre che “qualità” significhi “funzioni predicative”. Quindi quando dico “Napoleone aveva tutte le qualità, ecc.”, intendo | “Napoleone soddisfaceva 190 tutte le funzioni predicative, ecc.” Questa affermazione attribuisce una proprietà a Napoleone, ma non una proprietà predicativa; in questo modo sfuggiamo al circolo vizioso. Tuttavia, ovunque compaia l'espressione “tutte le funzioni che”, le funzioni in questione devono essere limitate a un solo tipo per evitare un circolo vizioso; e, come hanno dimostrato Napoleone e il tipico francese, il tipo non è determinato da quello

dell'argomento. Sarebbe necessaria una discussione molto più approfondita per esporre completamente questo punto, ma quanto detto finora può bastare a chiarire che le funzioni che possono accettare un dato argomento appartengono a una serie infinita di tipi. Potremmo, con vari accorgimenti tecnici, costruire una variabile che attraversi i primi *n* di questi tipi, dove *n* è finito, ma non possiamo costruire una variabile che li attraversi tutti e, se anche potessimo, questo semplice fatto genererebbe immediatamente un nuovo tipo di funzione con gli stessi argomenti, e farebbe ripartire l'intero processo.

Chiamiamo le funzioni predicative *a* -funzioni il *primo* tipo di *a* -funzioni; *le a* -funzioni che implicano un riferimento alla totalità del primo tipo le chiamiamo *secondo* tipo; e così via. Nessuna *a* -funzione variabile può attraversare tutti questi diversi tipi : deve fermarsi a uno di essi ben definito.

Queste considerazioni sono rilevanti per la nostra definizione della funzione estensionale derivata. Lì abbiamo parlato di "una funzione formalmente equivalente a ϕx ". È necessario decidere il tipo della nostra funzione. Qualsiasi decisione va bene, ma una decisione è inevitabile. Chiamiamo ψ la presunta funzione formalmente equivalente . Allora ψ appare come una variabile e deve essere di un tipo determinato. Tutto ciò che sappiamo necessariamente sul tipo di ϕ è che prende argomenti di un dato tipo, ovvero che è (per esempio) una funzione *a* . Ma questo, come abbiamo appena visto, non ne determina il tipo. Se vogliamo essere in grado (come richiede il nostro quinto requisito) di

trattare *tutte* le classi i cui membri sono dello stesso tipo di *a* , dobbiamo essere in grado di definire tutte queste classi per mezzo di funzioni di un certo tipo; vale a dire, deve esistere un qualche tipo di *funzione a* , diciamo l' *n* $^{-esimo}$, tale che qualsiasi *funzione* a sia formalmente | equivalente| a qualche *funzione* a dell'n - ^{esimo} tipo 191 . Se così fosse, allora qualsiasi funzione estensionale che valga per tutte *le a* -funzioni di n - ^{esimo} tipo varrà anche per qualsiasi *a* -funzione. È principalmente come mezzo tecnico per incarnare un'ipotesi che porta a questo risultato che le classi sono utili. L'ipotesi è chiamata "assioma di riducibilità" e può essere enunciata come segue:

“Esiste un tipo (diciamo τ) di *funzioni* a tale che, data una qualsiasi *funzione a* , essa è formalmente equivalente a una funzione del tipo in questione.”

Se si assume questo assioma, utilizziamo funzioni di questo tipo per definire la nostra funzione estensionale associata. Le affermazioni su tutte *le a* -classi (*ovvero* tutte le classi definite da *a* -funzioni) possono essere ridotte ad affermazioni su tutte *le a*-funzioni del tipo τ . Finché sono coinvolte solo funzioni estensionali di funzioni, questo ci fornisce in pratica risultati che altrimenti avrebbero richiesto la nozione impossibile di "tutte *le a* -funzioni". Un ambito in particolare in cui ciò è fondamentale è l'induzione matematica.

L'assioma di riducibilità implica tutto ciò che è realmente essenziale nella teoria delle classi. Vale quindi la pena chiedersi se vi siano ragioni per supporre che sia vero.

Questo assioma, come l'assioma moltiplicativo e l'assioma dell'infinito, è necessario per certi risultati, ma non per la mera esistenza del ragionamento deduttivo. La teoria della deduzione, come spiegato nel Capitolo XIV, e le leggi per le proposizioni che coinvolgono "tutti" e "alcuni", sono intrinseche al ragionamento matematico: senza di esse, o qualcosa di simile, non solo non otterremmo gli stessi risultati, ma non otterremmo alcun risultato. Non possiamo usarle come ipotesi e dedurre conseguenze ipotetiche, perché sono regole di deduzione oltre che premesse. Devono essere assolutamente vere, altrimenti ciò che deduciamo in base ad esse non deriva nemmeno dalle premesse. D'altra parte, l'assioma di riducibilità, come i nostri due precedenti assiomi matematici, potrebbe benissimo essere enunciato come un'ipotesi ogni volta che viene utilizzato, invece di essere assunto come effettivamente vero. Possiamo dedurne le conseguenze ipoteticamente; possiamo anche dedurre le conseguenze del supporre che sia falso . È dunque solo una questione di convenienza, non di necessità. E vista la complessità della teoria dei tipi e l'incertezza di tutti i suoi principi, eccetto quelli più generali, è ancora impossibile dire se non si possa trovare un modo per fare a meno del tutto dell'assioma di riducibilità. Tuttavia, ammesso che la teoria sopra descritta sia corretta, cosa possiamo dire circa la verità o la falsità dell'assioma?

L'assioma, possiamo osservare, è una forma generalizzata dell'identità degli indiscernibili di Leibniz. Leibniz presupponeva, come principio logico, che due soggetti diversi debbano differire per quanto riguarda i predicati. Ora, i predicati sono solo alcuni di

quelli che abbiamo chiamato "funzioni predicative", che includono anche le relazioni con termini dati e varie proprietà che non vanno considerate predicati. Pertanto, il presupposto di Leibniz è molto più rigoroso e ristretto del nostro. (Non, ovviamente, secondo *la sua* logica, che considerava *tutte* le proposizioni riducibili alla forma soggetto-predicato). Ma non c'è una buona ragione per credere alla sua formulazione, per quanto ne so. Potrebbero benissimo esistere, in termini di astratta possibilità logica, due cose che abbiano esattamente gli stessi predicati, nel senso ristretto in cui abbiamo usato il termine "predicato". Come appare il nostro assioma quando andiamo oltre i predicati in questo senso ristretto? Nel mondo reale non sembra esserci modo di dubitare della sua verità empirica per quanto riguarda i particolari, a causa della differenziazione spazio-temporale : nessun particolare ha esattamente le stesse relazioni spaziali e temporali con tutti gli altri particolari. Ma questo è, per così dire, un accidente, un fatto del mondo in cui ci troviamo. La logica pura, e la matematica pura (che è la stessa cosa), mirano ad essere vere, nella fraseologia leibniziana, in tutti i mondi possibili, non solo in questo caotico groviglio di cose che è un mondo in cui il caso ci ha imprigionati. C'è una certa nobiltà che il logico dovrebbe conservare: non deve abbassarsi a derivare argomentazioni dalle cose che vede intorno a sé .

Vista da questo punto di vista strettamente logico, 193 non vedo alcuna ragione per credere che l'assioma di riducibilità sia logicamente necessario, che è ciò che si intenderebbe dicendo che è vero in tutti i mondi possibili. L'ammissione di questo

assioma in un sistema logico è quindi un difetto, anche se l'assioma è empiricamente vero. È per questa ragione che la teoria delle classi non può essere considerata completa quanto la teoria delle descrizioni.

La teoria dei tipi necessita di ulteriori approfondimenti, nella speranza di giungere a una dottrina delle classi che non richieda un'assunzione così dubbia. Tuttavia, è ragionevole considerare corretta, nei suoi principi fondamentali, la teoria delineata in questo capitolo, *ovvero* nella sua riduzione di proposizioni nominalmente riguardanti le classi a proposizioni riguardanti le loro funzioni definitorie. L'evitare di considerare le classi come entità, attraverso questo metodo, sembra essere valido in linea di principio, sebbene i dettagli possano ancora richiedere degli aggiustamenti. È proprio perché ciò appare indubbio che abbiamo incluso la teoria delle classi, nonostante il nostro desiderio di escludere, per quanto possibile, tutto ciò che sembrava soggetto a seri dubbi.

La teoria delle classi, come sopra delineata, si riduce a un assioma e a una definizione. Per chiarezza, li ripeteremo qui. L'assioma è:

Esiste un tipo τ tale che se ϕ è una funzione che può accettare come argomento un dato oggetto a *, allora esiste una funzione ψ del tipo τ che è formalmente equivalente a ϕ .*

La definizione è:

Se ϕ è una funzione che può accettare come argomento un dato oggetto a , e τ *è il tipo menzionato nell'assioma precedente, allora affermare che la classe determinata da ϕ ha la proprietà f significa affermare che esiste una funzione di tipo τ , formalmente equivalente a ϕ , che possiede la proprietà f.*

Capitolo XVIII Matematica e logica

Storicamente parlando, matematica e logica sono state per 194 discipline completamente distinte. La matematica è stata associata alla scienza, la logica al greco. Ma entrambe si sono sviluppate in epoca moderna: la logica è diventata più matematica e la matematica più logica. Di conseguenza, è ormai impossibile tracciare una linea di demarcazione tra le due; di fatto, sono una cosa sola. Sono diverse come il ragazzo e l'uomo: la logica è la giovinezza della matematica e la matematica è la maturità della logica. Questa visione è malvista dai logici che, avendo trascorso il loro tempo nello studio dei testi classici, sono incapaci di seguire un ragionamento simbolico, e dai matematici che hanno appreso una tecnica senza preoccuparsi di indagarne il significato o la giustificazione. Fortunatamente, entrambe le tipologie stanno diventando sempre più rare.

Gran parte del lavoro matematico moderno si colloca evidentemente al confine con la logica, e gran parte della logica moderna è simbolica e formale, tanto che la stretta relazione tra logica e matematica è diventata evidente a ogni studente istruito. La dimostrazione della loro identità è, naturalmente, una questione di dettagli: partendo da premesse che sarebbero universalmente ritenute appartenenti alla logica, e arrivando per deduzione a risultati che appartengono altrettanto evidentemente alla matematica, constatiamo che non esiste un punto in cui si possa tracciare una linea netta, con la logica a sinistra e la matematica a destra. Se ancora ci sono coloro che non

ammettono l'identità tra logica e matematica, possiamo sfidarli a indicare in quale punto, nelle successive definizioni e deduzioni dei *Principia Mathematica* , 195, ritengono che la logica finisca e la matematica inizi. Sarà allora ovvio che qualsiasi risposta debba essere del tutto arbitraria.

Nei primi capitoli di questo libro, partendo dai numeri naturali, abbiamo dapprima definito il “numero cardinale” e mostrato come generalizzare il concetto di numero, per poi analizzare i concetti implicati nella definizione, fino ad arrivare ai fondamenti della logica. In un approccio sintetico e deduttivo, questi fondamenti vengono prima, e i numeri naturali vengono raggiunti solo dopo un lungo percorso. Tale approccio, sebbene formalmente più corretto di quello da noi adottato, risulta più complesso per il lettore, poiché i concetti e le proposizioni logiche ultime da cui parte sono remoti e poco familiari rispetto ai numeri naturali. Inoltre, essi rappresentano l'attuale frontiera della conoscenza, oltre la quale si estende l'ignoto; e il dominio della conoscenza su di essi non è ancora del tutto consolidato.

Si diceva che la matematica fosse la scienza della "quantità". "Quantità" è un termine vago, ma per amor di discussione possiamo sostituirlo con "numero". L'affermazione che la matematica sia la scienza del numero sarebbe falsa in due modi diversi . Da un lato, esistono branche riconosciute della matematica che non hanno nulla a che fare con i numeri: tutta la geometria che non usa coordinate o misurazioni, ad esempio: la geometria proiettiva e descrittiva, fino al punto in cui vengono

introdotte le coordinate, non ha a che fare con i numeri, o nemmeno con la quantità nel senso di *maggiore* e *minore* . Dall'altro lato, attraverso la definizione dei cardinali, attraverso la teoria dell'induzione e delle relazioni ancestrali, attraverso la teoria generale delle serie e attraverso le definizioni delle operazioni aritmetiche, è diventato possibile generalizzare molto di ciò che prima veniva dimostrato solo in relazione ai numeri. Il risultato è che quello che prima era il singolo studio dell'Aritmetica ora si è diviso in una serie di studi separati, nessuno dei quali si occupa specificamente dei numeri. Le proprietà elementari dei numeri 196 riguardano le relazioni biunivoche e la similarità tra classi. L'addizione riguarda la costruzione di classi mutuamente esclusive, o simili a un insieme di classi che non sono note per essere mutuamente esclusive. La moltiplicazione è integrata nella teoria delle "selezioni", *ovvero* di un certo tipo di relazioni uno-molti. La finitezza è integrata nello studio generale delle relazioni ancestrali, che fornisce l'intera teoria dell'induzione matematica. Le proprietà ordinali dei vari tipi di serie numeriche e gli elementi della teoria della continuità delle funzioni e dei limiti delle funzioni possono essere generalizzati in modo da non implicare più alcun riferimento essenziale ai numeri. È un principio, in ogni ragionamento formale, generalizzare al massimo, poiché in tal modo ci assicuriamo che un dato processo di deduzione abbia risultati più ampiamente applicabili; pertanto, generalizzando così il ragionamento aritmetico, non facciamo altro che seguire un precetto universalmente ammesso in matematica. Generalizzando in tal modo, abbiamo di fatto

creato un insieme di nuovi sistemi deduttivi, nei quali l'aritmetica tradizionale viene al contempo dissolta e ampliata; ma stabilire se uno qualsiasi di questi nuovi sistemi deduttivi – ad esempio, la teoria delle selezioni – appartenga alla logica o all'aritmetica è del tutto arbitrario e non può essere deciso razionalmente.

Ci troviamo dunque di fronte alla domanda: cos'è questa materia, che può essere chiamata indifferentemente matematica o logica? Esiste un modo per definirla?

Alcune caratteristiche della materia sono chiare. Innanzitutto, in questa materia non ci occupiamo di cose particolari o di proprietà particolari: ci occupiamo formalmente di ciò che si può dire di *qualsiasi* cosa o *proprietà* . Siamo disposti a dire che uno più uno fa due, ma non che Socrate e Platone siano due, perché, nella nostra veste di logici o matematici puri, non abbiamo mai sentito parlare di Socrate e Platone. Un mondo in cui non esistessero tali individui sarebbe comunque un mondo in cui uno più uno fa due. Non ci è consentito, in quanto matematici puri o logici, menzionare alcunché, perché, se lo facessimo, introdurremmo qualcosa di irrilevante e non 197

formale. Possiamo chiarirlo applicandolo al caso del sillogismo. La logica tradizionale afferma: "Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale". Ora è chiaro che ciò che intendiamo *affermare* , in primo luogo, è solo che le premesse implicano la conclusione, non che premesse e conclusione siano effettivamente vere; anche la logica più tradizionale sottolinea che la verità effettiva delle premesse è

irrilevante per la logica. Pertanto, la prima modifica da apportare al sillogismo tradizionale di cui sopra è quella di esprimerlo nella forma: "Se tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale". Possiamo ora osservare che si intende comunicare che questo argomento è valido in virtù della sua *forma* , non in virtù dei termini particolari che vi compaiono. Se avessimo omesso "Socrate è un uomo" dalle nostre premesse, avremmo avuto un argomento non formale, ammissibile solo perché Socrate è effettivamente un uomo; in tal caso non avremmo potuto generalizzare l'argomento. Ma quando, come sopra, l'argomentazione è *formale* , nulla dipende dai termini che vi compaiono. Possiamo quindi sostituire *α* con *uomini* , *β* con *mortali* e *x* con *Socrate* , dove *α* e *β* sono classi qualsiasi e *x* è un individuo qualsiasi. Arriviamo così all'affermazione: "Indipendentemente dai possibili valori che *x* , *α* e *β* possono assumere, se tutti *gli α* sono *β* e *x* è un *α* , allora *x* è un *β* "; in altre parole, "la funzione proposizionale 'se tutti gli *α* sono *β* e *x* è un *α* , allora *x* è un *β* ' è sempre vera". Ecco finalmente una proposizione logica, quella che è solo *suggerita* dall'affermazione tradizionale su Socrate, gli uomini e i mortali .

È chiaro che, se il ragionamento *formale* è ciò a cui miriamo, giungeremo sempre, in ultima analisi, ad affermazioni come quella sopra riportata, in cui non vengono menzionate cose o proprietà concrete; ciò accadrà per il semplice desiderio di non sprecare tempo a dimostrare in un caso particolare ciò che può essere dimostrato in generale. Sarebbe ridicolo intraprendere una lunga argomentazione su Socrate e poi ripetere esattamente la

stessa argomentazione su Platone. Se la nostra argomentazione è (diciamo) valida per tutti gli uomini, la dimostreremo riguardo a " *x* ", con l'ipotesi "se *x* è un uomo". Con questa ipotesi, l'argomentazione manterrà la sua validità ipotetica anche quando *x* non è un uomo. Ma ora scopriremo che la nostra argomentazione sarebbe comunque valida se, invece di supporre che *x* sia un uomo, supponessimo che sia una scimmia, un'oca o un Primo Ministro. Non perderemo quindi tempo prendendo come premessa " *x* è un uomo", ma prenderemo " *x* è un *α* ", dove *α* è una qualsiasi classe di individui, o " *ϕx* ", dove *ϕ* è una qualsiasi funzione proposizionale di un tipo assegnato. Pertanto, l'assenza di qualsiasi menzione di cose o proprietà particolari nella logica o nella matematica pura è una conseguenza necessaria del fatto che

Questo studio è, come si suol dire, "puramente formale".

A questo punto ci troviamo di fronte a un problema più facile da enunciare che da risolvere. Il problema è: "Quali sono gli elementi costitutivi di una proposizione logica?". Non conosco la risposta, ma mi propongo di spiegare come sorge il problema.

Consideriamo (per esempio) la proposizione "Socrate visse prima di Aristotele". Qui sembra ovvio che abbiamo una relazione tra due termini e che i costituenti della proposizione (così come del fatto corrispondente) sono semplicemente i due termini e la relazione, *ovvero* Socrate, Aristotele e *prima* . (Ignoro il fatto che Socrate e Aristotele non siano semplici; così come il fatto che quelli che sembrano essere i loro nomi siano in realtà descrizioni

troncate. Nessuno di questi fatti è rilevante per la questione in esame.) Possiamo rappresentare la forma generale di tali proposizioni con " *x* R *y* ", che può essere letto " *x* ha la relazione R con *y* ". Questa forma generale può comparire nelle proposizioni logiche, ma non può verificarsi alcuna istanza particolare di essa. Dobbiamo forse dedurre che la forma generale stessa sia un costituente di tali proposizioni logiche?

Data una proposizione, come “Socrate è precedente ad Aristotele”, abbiamo certi costituenti e anche una certa forma. Ma la forma non è di per sé un nuovo costituente; se lo fosse, avremmo bisogno di una nuova forma per includere sia essa che gli altri costituenti. Possiamo, infatti, trasformare *tutti* i costituenti di una proposizione in variabili, mantenendo la forma invariata. Questo è ciò che facciamo quando utilizziamo uno schema come

“ *x* R *y* ”, che rappresenta una qualsiasi di una certa classe 199 di proposizioni, vale a dire quelle che affermano relazioni tra due termini. Possiamo procedere con asserzioni generali, come “ *x* R *y* è talvolta vero”, *cioè* ci sono casi in cui valgono relazioni duali. Questa asserzione apparterrà alla logica (o alla matematica) nel senso in cui usiamo il termine. Ma in questa asserzione non menzioniamo cose particolari o relazioni particolari; nessuna cosa o relazione particolare può mai entrare in una proposizione di logica pura. Ci rimangono le *forme* pure come unici costituenti possibili delle proposizioni logiche.

Non intendo affermare con certezza che le forme pure, *ad esempio* la forma “ $x \in R\, y$ ”, entrino effettivamente nelle

proposizioni del tipo che stiamo considerando. La questione dell'analisi di tali proposizioni è complessa , con considerazioni contrastanti da una parte e dall'altra. Non possiamo affrontare ora questo argomento, ma possiamo accettare, come prima approssimazione, l'idea che *le forme* siano ciò che entra nelle proposizioni logiche come loro costituenti. E possiamo spiegare (pur senza definirle formalmente) cosa intendiamo per “forma” di una proposizione nel modo seguente:

La “forma” di una proposizione è quella che, in essa, rimane invariata quando ogni costituente della proposizione viene sostituito da un altro.

Pertanto, l'affermazione "Socrate è anteriore ad Aristotele" ha la stessa forma di "Napoleone è superiore a Wellington", sebbene ogni elemento costitutivo delle due proposizioni sia diverso .

Possiamo quindi stabilire, come caratteristica necessaria (sebbene non sufficiente) delle proposizioni logiche o matematiche, che esse siano tali da poter essere ottenute da una proposizione priva di variabili (*cioè* senza parole come " *tutti"* , *"alcuni"* , *"un"* , *"il"* , ecc.) trasformando ogni costituente in una variabile e affermando che il risultato è sempre vero o talvolta vero, oppure che è sempre vero rispetto ad alcune delle variabili, oppure che il risultato è talvolta vero rispetto alle altre, o qualsiasi variante di queste forme. Un altro modo per affermare la stessa cosa è dire che la logica (o la matematica) si occupa solo delle *forme* , e si occupa di esse solo nel modo di affermare che sono

sempre o talvolta vere, considerando tutte le permutazioni di "sempre" e "talvolta" che possono verificarsi.

In ogni lingua esistono parole la cui unica funzione è quella di indicare la forma. Queste parole, in linea generale, sono più comuni nelle lingue con meno flessioni. Prendiamo "Socrate è umano". Qui "è" non è un costituente della proposizione, ma indica semplicemente la forma soggetto-predicato. Analogamente, in "Socrate è anteriore ad Aristotele", "è" e "di" indicano semplicemente la forma; la proposizione è la stessa di "Socrate precede Aristotele", in cui queste parole sono scomparse e la forma è indicata in altro modo. La forma, di norma, *può* essere indicata anche in modi diversi dalle parole specifiche: l'ordine delle parole può essere sufficiente. Ma questo principio non deve essere forzato. Ad esempio, è difficile capire come potremmo esprimere comodamente le forme molecolari delle proposizioni (*cioè* quelle che chiamiamo "funzioni di verità") senza alcuna parola. Abbiamo visto nel Capitolo XIV che una parola o un simbolo sono sufficienti a questo scopo, vale a dire una parola o un simbolo che esprima *incompatibilità* . Ma anche senza uno solo ci troveremmo in difficoltà . Questo, tuttavia, non è il punto importante per il nostro scopo attuale. Ciò che è importante per noi è osservare che la forma può essere l'unico elemento rilevante di una proposizione generale, anche quando nessuna parola o simbolo in quella proposizione designa la forma. Se vogliamo parlare della forma in sé, dobbiamo avere una parola per definirla; ma se, come in matematica, vogliamo parlare di tutte le proposizioni che hanno quella forma, di solito si

scoprirà che una parola per la forma non è indispensabile; probabilmente in teoria non lo è *mai* .

Supponendo – come credo sia possibile – che le forme delle proposizioni *possano* essere rappresentate dalle forme delle proposizioni stesse in cui sono espresse, senza l'ausilio di parole specifiche per indicarle, dovremmo giungere a un linguaggio in cui tutto ciò che è formale appartenesse alla sintassi e non al vocabolario. In un linguaggio del genere potremmo esprimere *tutte* le proposizioni della matematica anche senza conoscerne una sola parola. Il linguaggio della logica matematica, se fosse perfezionato , sarebbe un linguaggio di questo tipo. Avremmo simboli per le variabili, come " *x* ", "R" e " *y* ", disposti in vari modi; e il modo in cui sono disposti indicherebbe che qualcosa si sta affermando essere vero per tutti i valori o per alcuni valori delle variabili. Non avremmo bisogno di conoscere alcuna parola, perché sarebbero necessarie solo per assegnare valori alle variabili, compito che spetta al matematico applicato, non al matematico puro o al logico. Una delle caratteristiche di una proposizione logica è che, dato un linguaggio appropriato, tale proposizione può essere enunciata in quel linguaggio da una persona che ne conosce la sintassi senza conoscere una sola parola del vocabolario.

Ma, dopotutto, esistono parole che esprimono la forma, come "è" e "di". E in ogni simbolismo finora inventato per la logica matematica ci sono simboli che hanno significati formali costanti. Possiamo prendere come esempio il simbolo di incompatibilità,

impiegato nella costruzione delle funzioni di verità. Parole o simboli simili possono comparire anche in logica. La domanda è: come dobbiamo definirli?

Tali parole o simboli esprimono ciò che vengono chiamate “costanti logiche”. Le costanti logiche possono essere definite esattamente come abbiamo definito le forme; infatti, in sostanza sono la stessa cosa. Una costante logica fondamentale sarà ciò che è comune a un certo numero di proposizioni, ognuna delle quali può derivare da qualsiasi altra mediante la sostituzione dei termini uno con l'altro. Ad esempio, “Napoleone è maggiore di Wellington” deriva da “Socrate è anteriore ad Aristotele” mediante la sostituzione di “Napoleone” con “Socrate”, “Wellington” con “Aristotele” e “maggiore” con “anteriore”. Alcune proposizioni possono essere ottenute in questo modo dal prototipo “Socrate è anteriore ad Aristotele” e altre no; quelle che possono sono quelle che sono della forma “ *x* R *y* ”, *cioè* esprimono relazioni duali. Non possiamo ottenere dal prototipo di cui sopra mediante la sostituzione termine per termine proposizioni come “Socrate è umano” o “gli Ateniesi diedero la cicuta a Socrate”, perché la prima è del tipo soggetto- | forma predicativa e il secondo 202 esprime una relazione a tre termini. Se dobbiamo avere delle parole nel nostro linguaggio logico puro, queste devono essere tali da esprimere "costanti logiche", e le "costanti logiche" saranno sempre, o saranno derivate da, ciò che è in comune tra un gruppo di proposizioni derivabili l'una dall'altra, nel modo sopra descritto, mediante sostituzione termine per termine. E questo che è in comune è ciò che chiamiamo "forma".

In questo senso, tutte le “costanti” che compaiono nella matematica pura sono costanti logiche. Il numero 1 , ad esempio, deriva da proposizioni della forma: “Esiste un termine *c* tale che ϕx è vera quando, e solo quando, *x* è *c* ”. Questa è una funzione di ϕ , e diverse proposizioni derivano dall'assegnazione di valori diversi a ϕ . Possiamo (con una piccola omissione di passaggi intermedi non rilevanti per il nostro scopo attuale) considerare la suddetta funzione di ϕ come ciò che si intende per “la classe determinata da ϕ è una classe unitaria” o “la classe determinata da ϕ è un membro di 1 ” (dove 1 è una classe di classi). In questo modo, le proposizioni in cui compare 1 acquisiscono un significato che deriva da una certa forma logica costante. Lo stesso vale per tutte le costanti matematiche: sono tutte costanti logiche, ovvero abbreviazioni simboliche il cui pieno utilizzo in un contesto appropriato è definito mediante costanti logiche.

Sebbene tutte le proposizioni logiche (o matematiche) possano essere espresse interamente in termini di costanti logiche e variabili, non è vero che, viceversa, tutte le proposizioni esprimibili in questo modo siano logiche. Finora abbiamo trovato un criterio necessario, ma non sufficiente, per definire le proposizioni matematiche. Abbiamo definito in modo sufficiente la natura delle *idee* primitive in base alle quali si possono *definire* tutte le idee della matematica , ma non quella delle *proposizioni* primitive da cui si possono *dedurre* tutte le proposizioni della matematica . Questa è una questione più complessa , per la quale non si conosce ancora la risposta completa.

Possiamo prendere l'assioma dell'infinito come esempio di una proposizione che, sebbene possa essere enunciata in termini logici, non può essere affermata logicamente come vera . Tutte le proposizioni della logica hanno una caratteristica che veniva espressa dicendo che erano analitiche, o che le loro contraddizioni erano autocontraddittorie. Questo modo di affermare, tuttavia, non è soddisfacente. La legge di non contraddizione è solo una tra le proposizioni logiche; non ha una preminenza speciale; e la dimostrazione che la contraddizione di una proposizione è autocontraddittoria è probabile

richiedere altri principi di deduzione oltre al principio di non contraddizione. Tuttavia, la caratteristica delle proposizioni logiche che stiamo cercando è quella che è stata percepita, e che si intendeva definire, da coloro che affermavano che consistesse nella deducibilità dal principio di non contraddizione. Questa caratteristica, che per il momento possiamo chiamare *tautologia* , ovviamente non appartiene all'asserzione che il numero di individui nell'universo sia *n* , qualunque numero *n* sia. Se non fosse per la diversità dei tipi, sarebbe possibile dimostrare logicamente che esistono classi di *n* termini, dove n è un intero finito qualsiasi; o anche che esistono classi di $\aleph_0$ termini. Ma, a causa dei tipi, tali dimostrazioni, come abbiamo visto nel Capitolo XIII, sono fallaci. Siamo lasciati all'osservazione empirica per determinare se ci siano almeno *n* individui nel mondo. Tra i mondi "possibili", nel senso leibniziano, ci saranno mondi con uno, due, tre, ... individui. Non sembra esserci nemmeno alcuna necessità logica per cui dovrebbe esistere anche un solo individuo [37] —

perché, in effetti, dovrebbe esistere un mondo. La prova ontologica dell'esistenza di Dio, se fosse valida, stabilirebbe la necessità logica di almeno un individuo. Ma è generalmente riconosciuta come invalida, e in realtà si basa su una visione errata dell'esistenza, *cioè* non riesce a comprendere che l'esistenza può essere affermata solo di qualcosa descritto, non di qualcosa nominato, quindi è privo di senso argomentare da "questo è il tale" e "il tale esiste" a "questo esiste". Se rifiutiamo l'argomento ontologico , sembriamo portati a concludere 204 che l'esistenza di un mondo è un accidente *, cioè* non è logicamente necessaria. Se così fosse, nessun principio di logica può affermare "l'esistenza" se non sotto un'ipotesi, *cioè* nessuno può essere della forma "la funzione proposizionale tale è talvolta vera". Le proposizioni di questa forma, quando si presentano in logica, dovranno essere formulate come ipotesi o conseguenze di ipotesi, non come proposizioni affermate complete. Le proposizioni affermate complete della logica saranno tutte tali da affermare che una certa funzione proposizionale è *sempre* vera. Ad esempio, è sempre vero che se *p* implica *q* e *q* implica *r,* allora *p* implica *r* , oppure che, se tutti *gli α* sono *β* e *x* è un *α* , allora *x* è un β.*β* . Tali proposizioni possono verificarsi in logica e la loro verità è indipendente dall'esistenza dell'universo. Possiamo affermare che, se non ci fosse l'universo, *tutte* le proposizioni generali sarebbero vere; infatti la contraddittoria di una proposizione generale (come abbiamo visto nel Capitolo XV) è una proposizione

zione che afferma l'esistenza, e sarebbe quindi sempre falsa se non esistesse un universo.

Le proposizioni logiche sono quelle che possono essere conosciute *a priori* , senza bisogno di studiare il mondo reale. Sappiamo solo dallo studio dei fatti empirici che Socrate è un uomo, ma conosciamo la correttezza del sillogismo nella sua forma astratta (*cioè* quando è espresso in termini di variabili) senza bisogno di ricorrere all'esperienza. Questa non è una caratteristica delle proposizioni logiche in sé, ma del modo in cui le conosciamo. Ha tuttavia un'influenza sulla questione della loro natura, poiché esistono alcuni tipi di proposizioni che sarebbe molto difficile supporre di poter conoscere senza esperienza.

È chiaro che la definizione di “logica” o “matematica” deve essere ricercata cercando di dare una nuova definizione della vecchia nozione di proposizioni “analitiche”. Sebbene non possiamo più accontentarci di definire le proposizioni logiche come quelle che derivano dalla legge di non contraddizione, possiamo e dobbiamo ancora ammettere che esse costituiscono una classe di proposizioni completamente diversa da quelle che conosciamo empiricamente. Tutte possiedono la caratteristica che, poco fa, abbiamo convenuto di chiamare “tautologia”. Questa, combinata con il fatto che possono essere espresse interamente in termini di variabili e costanti logiche (una costante logica è qualcosa che rimane costante in una proposizione anche quando tutti *i* suoi costituenti vengono modificati), darà la definizione di logica o di matematica pura. Per il momento, non so come definire la

“tautologia”. [38] Sarebbe facile offrire una definizione che potrebbe *sembrare* soddisfacente per un po’; ma non ne conosco nessuna che ritenga soddisfacente, nonostante io conosca a fondo la caratteristica di cui si desidera una definizione. A questo punto, quindi, per il momento, raggiungiamo la frontiera della conoscenza nel nostro viaggio a ritroso verso i fondamenti logici della matematica.

Siamo giunti alla fine di questa breve introduzione alla filosofia matematica. È impossibile trasmettere adeguatamente le idee che la caratterizzano se ci asteniamo dall'uso di simboli logici. Poiché il linguaggio ordinario non possiede parole che esprimano naturalmente e con precisione ciò che desideriamo esprimere, finché ci atteniamo a tale linguaggio, è necessario forzare le parole ad assumere significati insoliti; e il lettore, dopo un po' di tempo se non all'inizio, tenderà sicuramente ad attribuire alle parole i significati usuali, giungendo così a conclusioni errate su ciò che si intende dire. Inoltre, la grammatica e la sintassi ordinarie sono straordinariamente fuorvianti. Questo è il caso, ad *esempio* , dei numeri: "dieci uomini" è grammaticalmente identico a "uomini bianchi", quindi 10 potrebbe essere scambiato per un aggettivo che qualifica "uomini". Lo stesso accade, ancora, ovunque siano coinvolte funzioni proposizionali, e in particolare per quanto riguarda l'esistenza e le descrizioni. Poiché il linguaggio è fuorviante, oltre che difficile e impreciso se applicato alla logica (per la quale non è mai stato concepito), il simbolismo logico è assolutamente necessario per qualsiasi trattamento preciso o approfondito del nostro argomento. Pertanto, è

auspicabile che quei lettori che desiderano acquisire una padronanza dei principi della matematica non si sottraggano alla fatica di padroneggiare i simboli, una fatica che, in realtà, è molto inferiore a quanto si possa pensare. Come la suddetta rapida panoramica deve aver reso evidente, ci sono innumerevoli problemi irrisolti in materia e molto lavoro resta da fare. Se questo piccolo libro indurrà anche un solo studente ad intraprendere uno studio serio della logica matematica, avrà raggiunto lo scopo principale per cui è stato scritto.

Indice

[Nota sull'edizione online: questa è una ricreazione ipertestuale dell'indice originale. I numeri di pagina elencati sono quelli dell'edizione originale, ovvero quelli contrassegnati nell'

margini di questa edizione.]

Aggregati, 12. Aleph, 83 , 92 , 97 , 125 .

Aliorelativi, 32 .

Tutti , 158 e seguenti .

Analisi, 4 .

Antenati, 25 , 33 .

Argomento di una funzione, 47 , 108 .

Aritmetizzazione della matematica, 2. Diritto associativo, 58 , 94 .

Assiomi, 1 .

Tra, 38 e seguenti ., 58 .

Bolzano, 138 n.

Stivali e calzini, 126. Confine, 70 , 98 , 99 .

Cantor, Georg, 87 , 89 , 85 n., 86 , 89 , 95 , 102 , 136 .

Classi, 12 , 137 , 181 e seguenti ; riflessivo, 80 , 127 ,

138 ; simile, 15 , 16 .

Clifford , WK, 76. Collezioni , infinite, 13. Legge commutativa , 58 , 94 .

Congiunzione, 147 .

Consecutività, 37 , 38 , 81 .

Costanti, 202 .

Costruzione, metodo di, 73 .

Continuità, 86 , 97 e seguenti ;

Cantoriano, 102 ss .; Dedekindiano, 101 ; in filosofia, 105 ; delle funzioni, 106 ss . Contraddizioni, 135 ss .

Convergenza, 115 .

Converse, 16 , 32 , 49 .

Correlatori, 54 .

Controparti, oggettive, 61 .

Contare, 14 , 16 .

Dedekind, □□ , □□ , 1□□□ n.

Deduzione, 144 e seguenti .

Definizione, 3 ; estensionale e intensionale, 12 .

Derivati, 100. Descrizioni, 139 , 144 , 167 e seguenti .

Dimensioni, 29 .

Disgiunzione, 147. Legge distributiva, 58 , 94 .

Diversità, 87 .

Dominio, 16 , 32 , 49 .

Equivalenza, 183 .

Euclide, 67. Esistenza, 164 , 161 , 167. Elevamento a potenza, 94 , 120. Estensione di una relazione, 60 .

Finzioni logiche, 14 n., 45 , 137. Campo di una relazione, 32 , 53 .

Finito, 27 .

Flusso, 105 .

Modulo, 198 .

Frazioni, 37 , 64. Frege, 7 , 10 [11] , 25 n., 77 , 95 , 146 n.

Funzioni, 46 ; descrittive, 46 , 180 ; intensionali ed estensionali, 186 ; predicative, 189 ; proposizionali, 46 , 144 , 155 e seguenti .

Gap, Dedekindiano, ?? ss ., ?? .

Generalizzazione, 156 .

Geometria, 29 , 59 , 67 , 74 , 100 , 145 ; analitica, 6 , 86 .

Maggiore e minore, 65 , 90 .

Hegel, 107. Proprietà ereditarie, 21 .

Implicazione, ??? , ??? ; formale, ??? . Incommensurabili, ? , ?? .

Incompatibilità, 147 e seguenti , 200. Simboli incompleti, 182 .

Indiscernibili, 192. Individui, 132 , 141 , 173 .

Induzione matematica, 20 e segg ., 87 , 93 , 185. Proprietà induttive, 21 .

Inferenza, 148 e seguenti .

Infinito, 28 ; dei razionali, 65 ; Cantoriano, 65 ; dei cardinali, 77 e segg .; e serie e ordinali, 89 e segg . Infinito, assioma di, 66 n., 77 , 131 e segg ., 202 .

Esempi: 156 .

Numeri interi, positivi e negativi, 64. Intervalli, 115 .

Intuizione, 145. Irrazionali, 66 , 72. | Kant , 145 .

Leibniz, ?? , 1?? , 1??? . Lewis, CI, ??? , ??? .

Somiglianza, 52 .

Limite, 29 , 69 e seguenti , 97 e seguenti ; di funzioni,

106 e seguenti .

Punti limite, 99 .

Logica, 159 , 169 , 194 e seguenti ; matematica, v , 201 , 206 .

Logicificazione della matematica, 5 .

Mappe, 92 , 90 e segg ., 80 .

Matematica, 194 e seguenti .

Massimo, 70 , 98 .

Classe mediana, 104 .

Meinong, ??? .

Metodo, vi .

Minimo, 70 , 98 .

Modalità, 165 .

Moltiplicazione, 118 e segg . Assioma moltiplicativo, 92 , 117 e segg .

208 Nomi, 173 , 182 .

Necessità, 165 .

Quartiere, 109 . Nicod, 148 , 149 , 151 n.

Classe nulla, 23 , 132 .

Numero, cardinale, 10 e seguenti .,

56 , 77 ss ., 95 ; complesso,

74 ff .; finito, 20 ff .; induttivo, 27 , 78 , 131 ; infinito, 77 ff .;

irrazionale, 66 , 72 ;

massimo? 135 ;

moltiplicabile, 130 ; naturale, 2 ff ., 22 ; non induttivo, 88 , 127 ; reale, 66 , 72 , 84 ; riflessivo, 80 , 127 ; relazione, 56 , 94 ; seriale, 57 .

Occam, 184 .

Eventi, primari e secondari, 179. Prova ontologica, 203. Ordine, 29 e seguenti ; ciclico, 40. Oscillazione ultima, 111 .

Parmenide , 138. Particulars, 140 ss ., 173. Peano, 5 ss ., 23 , 24 , 78 , 81 , 131 , 163 .

Peirce, 32 n.

Permutazioni, 50 .

Filosofia, matematica, v , 1 .

Platone, 138 .

Pluralità, 10 . Poincaré, 27 .

Punti, 59 . Posterità, 22 ss .; propriamente detto, 36 .

Postulati, 71 , 73 .

Precedente, 98. Premesse dell'aritmetica, 5 .

Idee e proposizioni primitive, 5 , 202 .

Progressioni, 8 , 81 e seguenti .

Proposizioni, 155 ; analitiche, 204 ; elementari, 161. Pitagora, 4 , 67 .

Quantità, 97 , 195 .

Rapporti, ?? , ?? , ?? , ??? .

Riducibilità, assioma di, 191 .

Referente , 48 .

Numeri di relazione,

56 e seguenti .

Relazioni, asimmetriche, 31 , 42 ; connesse, 32 ; molti-uno, 15 ; uno-molti, 15 , 45 ; uno-uno, 15 , 47 , 79 ; riflessive, 16 ; seriali, 34 ; simili, 52 e seguenti ; quadrati di, 32 ; simmetriche, 16 , 44 ; transitive, 16 , 32 .

Relatum , 48 .

Rappresentanti, 120 .

Rigore, 144 . Royce, 80 .

Sezione, Dedekindiano, ?? ss .; ultimo, ??? .

Segmenti, 72 , 98 .

Selezione, 117 e seguenti .

Sequente, 98 .

Serie, 29 e seguenti ; chiusa,

103 ; compatto, 66 , 93 , 100 ; condensato in

stesso, 102 ;

Dedekindiano, 71 , 73 , 101 ; generazione di, 41 ; infinito, 89 e seguenti ; perfetto,

102 , 103 ; ben ordinato, 92 , 123 .

Lei ff er, 148 .

Somiglianza, di classi, 15 e segg .; di relazioni, 52 e segg ., 83 .

Alcuni, 158 e seguenti .

Spazio, 61 , 86 , 140 .

Struttura, 60 e seguenti .

Sottoclassi, 84 e seguenti .

Argomenti, 142 .

Sottrazione, 87. Successore di un numero, 23 , 35 .

Sillogismo, 197 .

Tautologia, 203 , 205 .

Il , 167 , 162 e seguenti .

Tempo, 61 , 86 , 140 .

Funzione di verità, 147 .

Valore di verità, 146. Tipi logici, 53 , 135 e seguenti , 185 , 188 .

Irrealtà, 168 .

Valore di una funzione, 47 ,

108 . Variabili, 10 , 161 , 199 .

Veblen, 58 .

Verbi, 141 .

Weierstrass, 97 , 107 .

Wells, HG, 114 .

Whitehead, 64 , 66 , 107 , 119 .

Wittgenstein, 205 n.

Zermelo, 1□□ , 1□□ .

Zero, 65 .

Modifiche all'edizione online

Questa edizione corretta online è stata creata da Kevin C. Klement; questa è la versione 1.0 *(* 5 febbraio 2010) . Si basa sulla cosiddetta "seconda edizione" dell'aprile 1920 pubblicata da Allen & Unwin, che, secondo gli standard contemporanei, era semplicemente una seconda ristampa dell'edizione originale del 1919 , ma che incorporava varie correzioni, per lo più minori. Questa edizione incorpora anche correzioni provenienti da ristampe successive e alcune nuove correzioni, menzionate di seguito. La paginazione dell'edizione Allen & Unwin è riportata nei margini, con le interruzioni di pagina contrassegnate dal segno " | ". Queste sono in rosso, così come altre aggiunte al testo non scritte da

Russell.

Ringrazio i membri delle mailing list Russell-l e HEAPSl per l'aiuto nella revisione e correzione di bozze di questa versione, tra cui Adam Killian, Pierre Grenon, David Blitz, Brandon Young, Rosalind Carey e, soprattutto, John Ongley. Un immenso ringraziamento va a Kenneth Blackwell del Bertrand Russell Archives/Research Centre, McMaster University, per aver corretto gran parte dell'edizione, averla confrontata con il manoscritto autografo di Russell e aver fornito altri preziosi consigli e assistenza. Un altro grande ringraziamento va a Christof Graber che ha confrontato questa versione con le versioni a stampa e ha dimostrato una notevole capacità nell'individuare le discrepanze. Mi assumo la piena responsabilità di eventuali errori rimanenti. Se ne doveste

riscontrare, vi prego di inviarmi un'e-mail all'indirizzo klement@philos.umass.edu .

L'edizione online differisce dall'edizione Allen & Unwin del 1920 e dalle sue ristampe per alcuni aspetti. Alcune sono semplici differenze stilistiche . Altre rappresentano correzioni basate su discrepanze tra il manoscritto di Russell e l'edizione a stampa, oppure correggono piccoli errori grammaticali o tipografici. Le differenze stilistiche sono le seguenti:

- Nell'originale, la numerazione delle note a piè di pagina ricomincia da capo con ogni pagina. Poiché questa versione utilizza una paginazione diversa , è stato necessario numerare le note a piè di pagina in sequenza per ogni capitolo. Pertanto, ad esempio, la nota a piè di pagina indicata come nota 2 a pagina 8 di questa edizione era indicata come nota 1 a pagina 5 dell'originale.

- Salvo alcune eccezioni, l'edizione Allen & Unwin utilizza frazioni lineari del tipo " *x/y* " a metà paragrafo, ma frazioni verticali della forma " $_{y}^{x}$ " nelle anteprime. Contrariamente a questa pratica comune, quelle presenti nell'anteprima a pagina 84 dell'originale (pagina 136 di questa edizione) erano lineari, ma sono state convertite in frazioni verticali in questa edizione. Analogamente, le frazioni a metà paragrafo alle pagine 17 , 26 , 99 e 116 dell'originale (pagine 27 , 42 , 159 e 186 qui) erano stampate verticalmente nell'originale, mentre qui sono orizzontali.

Le seguenti modifiche e revisioni più significative sono evidenziate in verde in questa edizione. La maggior parte di esse deriva dal

confronto effettuato da Ken Blackwell con il manoscritto di Russell. Alcune erano già state segnalate in una precedente recensione del libro da G.A. Pfeiffer (Bulletin of *the American Mathematical Society* 27 : 2 (1920), pp. 81-90) .

1 . (pagina 3 n. / pagina originale 2 n.) Russell scrisse la data di pubblicazione errata (1911) per il secondo volume dei *Principia Mathematica* ; questa è stata corretta in 1912 .

2 . (pagina 34 / pagina originale 21) "... o tutti quelli che sono minori di 10000 ..." è cambiato in "... o tutti quelli che non sono minori di 10000 ..." per corrispondere al manoscritto di Russell e al significato ovviamente inteso del passaggio. Questo errore fu notato da Pfeiffer nel 1920 ma non corretto durante la vita di Russell.

3 . (pagina 68 / pagina originale 43) "... o limitando il dominio ai maschi o limitando il contrario alle femmine" viene modificato in "... o limitando il dominio ai maschi o limitando il dominio inverso alle femmine", che è come appariva nel manoscritto di Russell e sembra adattarsi meglio al contesto.

2 . (pagina 103 / pagina originale 62) "... a condizione che né *m* né *n* siano zero." è stato corretto in "... a condizione che né *m* né *n* siano zero." Grazie a John Ongley per aver individuato questo errore, presente anche nel manoscritto di Russell.

□ . (pagina □□□ n. / pagina originale □□ n.) La parola " *deutschen* " nell'originale (e nel manoscritto) " *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* " è scritta in maiuscolo.

6 . (pagina 158 / pagina originale 98) "... di una classe α , *cioè* i suoi limiti o il suo massimo, e poi..." viene modificato in "... di una classe α , *cioè* il suo limite o il suo massimo, e poi..." per corrispondere al manoscritto di Russell e al significato apparente del passaggio.

7 . (pagina 176 / pagina originale 110) "... il limite del suo valore per gli approcci da ..." è cambiato in "... il limite dei suoi valori per gli approcci da ...", che corrisponde al manoscritto di Russell ed è più appropriato per il significato del passaggio.

8 . (pagina 182 / pagina originale 113) La frase grammaticalmente scorretta "... vantaggi di questa forma di definizione è che analizza ..." viene modificata in "... vantaggio di questa forma di definizione è che analizza ..." per corrispondere al manoscritto di Russell.

9 . (pagina 184 / pagina originale 115) "... tutti i termini z tali che x ha la relazione P con x e z ha la relazione P con y ..." è corretto in "... tutti i termini z tali che x ha la relazione P con z e z ha la relazione P con y ..." Russell stesso lo corresse a mano nel suo manoscritto, ma non in modo chiaro, e su sua richiesta, fu modificato nella stampa del 1967 .

10 . (pagina 200 / pagina originale 124) Le parole "correlatore di α con β , e analogamente per ogni altra coppia. Ciò richiede un", che costituiscono esattamente una riga del manoscritto di Russell, sono state omesse, unendo così due frasi in una sola. Le parole mancanti sono ora state ripristinate.

11 . (pagina 207 / pagina originale 129) Il passaggio "... se x_1 è un elemento di y_1 , x_2 è un elemento di y_2 , x_3 è un elemento di y_3 , e così via; allora ..." viene modificato in "... se x_1 è un elemento di γ_1 , x_2 è un elemento di γ_2 , x_3 è un elemento di γ_3 , e così via; allora ..." per corrispondere al manoscritto di Russell e al significato ovviamente inteso del passaggio.

12 . (pagina 223 / pagina originale 139) Le parole "e poi l'idea dell'idea di Socrate", sebbene presenti nel manoscritto di Russell, sono state omesse nelle precedenti edizioni a stampa. Si noti che Russell menziona "tutte queste idee" nella frase successiva.

13 . (pagine 257 – 258 / pagina originale 160) Le due note a piè di pagina in questa pagina erano state collocate in modo errato. La seconda, il riferimento a *Principia Mathematica* ∗9 , era collegata nelle versioni precedenti alla frase che ora si riferisce alla prima nota a piè di pagina del capitolo. Tale nota a piè di pagina era stata collocata tre frasi più in basso. I riferimenti alle note a piè di pagina sono stati ripristinati nella posizione in cui erano stati collocati nel manoscritto di Russell.

14 . (pagina 257 / pagina originale 161) "... la negazione delle proposizioni del tipo a cui appartiene x ..." è cambiato in "... la negazione delle proposizioni del tipo a cui appartiene ϕx ..." per corrispondere al manoscritto di Russell. Questo è un altro errore notato da Pfeiffer .

15 . (pagina 260 / pagina originale 162) "Supponiamo di considerare che tutti "gli uomini siano mortali": noi..." è stato

modificato in “Supponiamo di considerare che “tutti gli uomini siano mortali”: noi…” per corrispondere al significato ovviamente inteso del passaggio e alla posizione delle virgolette di apertura nel manoscritto di Russell (sebbene qui abbia usato virgolette singole, come ha fatto sporadicamente in tutto il testo). Grazie a Christof Graber per aver individuato questo errore.

16 . (pagina 277 / pagina originale 173) “… in contrapposizione a un uomo specifico.” è corretto in “… in contrapposizione a uomini specifici.” Russell inviò questa modifica a Unwin nel 1937 , e fu apportata nella ristampa del 1938 .

17 . (pagina 281 / pagina originale 175) La “ ϕ ” in “… il processo di applicazione di affermazioni generali su ϕx a casi particolari…”, presente nel manoscritto di Russell, è stata esclusa dalle edizioni Allen & Unwin ed è stata ripristinata.

18 . (pagina 283 / pagina originale 176) La “ ϕ ” in “… risultante da una funzione proposizionale ϕx mediante la sostituzione di …” è stata esclusa dalle precedenti versioni pubblicate, sebbene appaia nel manoscritto di Russell e sembri necessaria affinché il passaggio abbia senso. Grazie a John Ongley per aver individuato questo errore, che era stato notato anche da Pfeiffer .

19 . (pagina 298 / pagine originali 186-87) Le due occorrenze di “ ϕ ” in “… le funzioni *estensionali* di una funzione ϕx possono, a fini pratici, essere considerate come funzioni della classe determinata da ϕx , mentre le funzioni *intensionali* non possono…” erano state omesse dalle precedenti versioni

pubblicate, ma compaiono nel manoscritto di Russell. Ancora grazie a John Ongley.

20 . (pagina 302 / pagina originale 189) Le edizioni Allen & Unwin riportano la frase come “Come definiremmo un francese “tipico”?” Qui, le virgolette di chiusura sono state spostate

per trasformarlo in "Come definiremmo un "francese tipico"?" Sebbene il manoscritto di Russell non sia del tutto chiaro su questo punto, sembra che quest'ultima fosse l'intenzione, e appare anche più sensata nel contesto.

21 . (pagina 305 / pagina originale 191) “C'è un tipo (*r* diciamo) ...” è stato cambiato in “C'è un tipo (τ diciamo) ...” per corrispondere al manoscritto di Russell, e le convenzioni sono state seguite altrove nel capitolo.

22 . (pagina 314 / pagina originale 195) “... diviso in un certo numero di studi separati...” è stato modificato in “... diviso in un certo numero di studi separati...” Il manoscritto di Russell conteneva semplicemente “numero”, al singolare, senza l’articolo indeterminativo. È stata necessaria una modifica per rendere il passaggio grammaticalmente corretto, ma la correzione adottata qui sembra più probabile che corrispondesse all’intento originale.

23 . (pagina 316 / pagina originale 197) Il passaggio “la funzione proposizionale 'se tutti gli α sono β e x è un α , allora x è un β ' è sempre vera” è stato modificato in “la funzione proposizionale 'se tutti *gli* α sono β e x è un α , allora x è un β ' è sempre vera” per corrispondere al manoscritto di Russell, così come

per renderla coerente con l'altra parafrasi fornita in precedenza nella frase. Grazie a Christof Graber per aver notato questo errore.

24 . (pagina 322 / pagina originale 200) “... senza alcuna parola speciale per le forme...” è stato cambiato in “... senza alcuna parola speciale per le forme...”, che corrisponde al manoscritto di Russell e sembra adattarsi meglio al contesto.

25 . (pagina 3333 / pagina originale 207) L'indice originale riportava un riferimento a Frege a pagina 10 , ma in realtà la discussione su Frege si trova a pagina 11. Qui, " 10 " è barrato e sostituito con "[11]".

Sono state apportate alcune correzioni *minime* alla punteggiatura nell'edizione Allen & Unwin 1920 , ma non sono state evidenziate in verde.

a) Le ellissi sono state regolarizzate in modo da avere tre punti pieni.

b) (pagina 85 / pagina originale 53) “Possiamo definire due relazioni...” non iniziava un nuovo paragrafo nelle edizioni precedenti, ma lo fa nel manoscritto di Russell, ed è stato modificato di conseguenza.

c) (pagina 86 / pagina originale 53) Ciò che appare nelle stampe del 1920 e successive come "... è il campo

di Q. e che è ...” viene modificato in “... è il campo di Q, e che è ...”

d) (pagina 90 / pagina originale 56) “... un numero di relazione è una classe di ...” viene modificato in “... un numero-di-relazione è una classe di ...” per uniformarsi alla sillabazione presente nel resto del libro (e nel manoscritto di Russell). Una modifica simile viene apportata anche nell'indice.

e) (pagina 96 / pagina originale 60) “... e “bipede senza piume,”—quindi due ...” è cambiato in “... e “bipede senza piume”—quindi due ...”

f) (pagine 132 – 134 / pagine originali 82 – 83) Sono stati corretti un errore di stampa di "progression" al posto di "progression" e un errore di stampa di "progressions" al posto di "progressions". (Grazie a Christof Graber per aver notato questi errori nell'originale.)

g) (pagina 184 / pagina originale 115) Nella stampa di Allen & Unwin, la “s” in “ *y* ’s” in ciò che appare qui come “Form all such sections for all *y* ’s ...” era in corsivo insieme alla “ *y* ”. Nulla nel manoscritto di Russell suggerisce che debba essere in corsivo, tuttavia. (Grazie ancora a Christof Graber.)

h) (pagina 193 / pagina originale 121) Nell'Allen

Nella versione stampata da Unwin, "Let *y* be a member of β ..." inizia un nuovo paragrafo, ma non nel manoscritto di Russell, e chiaramente non dovrebbe.

i) (pagina 208 / pagine originali 129 – 130) La frase “well ordered” è stata modificata due volte in “wellordered” per

corrispondere al manoscritto di Russell (nel primo caso) e al resto del libro (nel secondo).

j) (pagina 211 / pagina originale 131) “Il modo in cui sorge la necessità di questo assioma può essere spiegato come segue: — Uno dei... di Peano è cambiato in “Il modo in cui sorge la necessità di questo assioma può essere spiegato come segue. Uno dei... di Peano” ed è stato fatto iniziare un nuovo paragrafo, come accadeva nel manoscritto di Russell.

k) (pagina 219 / pagina originale 137) L'accento su “ *Metaphysique´* ”, incluso nel manoscritto di Russell ma omesso nella versione stampata, è stato ripristinato.

l) (pagina 259 / pagina originale 199) “... o quel che sia,—e chiaramente ...” è cambiato in “... o quel che sia—e chiaramente ...”

m) (pagina 282 / pagina originale 176) Il corsivo è stato aggiunto a una occorrenza di “ *Waverley* ” per renderla coerente con le altre.

n) (pagina 296 / pagina originale 185) “... la più difficile realizzazione ,—deve ...” è cambiato in “... la più difficile realizzazione ,—deve ...”

o) (pagina 316 / pagina originale 197) Nelle edizioni Allen & Unwin, "Socrate" non era in corsivo in "... possiamo sostituire α per *uomini* , β per *mortali* e *x* per Socrate, dove..." Russell lo aveva

contrassegnato per il corsivo nel manoscritto, e sembra naturale farlo per coerenza, quindi è stato messo in corsivo.

p) (pagina 329 / pagina originale 205) La parola “seem” non era in corsivo in “... una definizione che potrebbe sembrare soddisfacente per un po’...” nelle edizioni Allen & Unwin, ma era contrassegnata come tale nel manoscritto di Russell; qui è in corsivo.

q) (pagina 336 / pagina originale 208) Sotto "Relazioni" nell'indice, "similar, 52ff ;" è stato modificato in "similar, 52ff .;" per uniformarsi alla punteggiatura altrove.

Esistono tuttavia numerosi altri punti in cui le precedenti edizioni a stampa differiscono dal manoscritto di Russell in piccole differenze che sono state lasciate invariate in questa edizione. Per un esame dettagliato delle differenze tra il manoscritto di Russell e le edizioni a stampa, e tra le varie edizioni stesse (incluse le modifiche apportate dall'edizione del 1919 a quella del 1920 non documentate qui), si veda Kenneth Blackwell, “Variants, Misprints and a Bibliographical Index for *Introduction to Mathematical Philosophy* ”, *Russell* ns 29 (2009): 57 – 62 .

L'opera " *Introduzione alla filosofia matematica"*di Bertrand Russellè di pubblico dominio.

Vedi http://creativecommons.org/cba

Questa composizione tipografica (incluso il codice LATEX)

e l'elenco delle modifiche sono concessi in licenza con una licenza Creative Commons Attribuzione—Condividi allo stesso modo 3 . 0 Stati Uniti.

Vedi http://creativecommons.org/licenses/by-s a/

3 . 0 /us/

---

[1] Cambridge University Press, vol. i.,1910; vol. ii.,1912; vol.

iii., 1913 . Di Whitehead e Russell.

[2] Nel presente capitolo useremo “numero” in questo senso.

In seguito, il termine verrà utilizzato in un senso più generale.

[3] La stessa risposta è fornita in modo più completo e con maggiore sviluppo nei suoi*Grundgesetze der Arithmetik*, vol. i.,1893.

[4] Come verrà spiegato in seguito, le classi possono essere considerate finzioni logiche, create a partire da caratteristiche definitorie. Ma per

[5] Vedi*Principia Mathematica*, vol. ii.∗110.

[6] Vedere il capitolo XIII.

[7] Per la geometria, nella misura in cui non è puramente analitica, vedere*Principi di matematica*, parte VI; per la dinamica razionale,*ibid*., parte VII.

[8] Queste definizioni, e la teoria generalizzata dell'induzione, sono dovute a Frege e furono pubblicate molto tempo fa, nel1879,nella sua*Begriffsschrift*. Nonostante il grande valore di quest'opera, credo di essere stato il primo a leggerla, più di vent'anni dopo la sua pubblicazione.

[9] *Scienza e metodo*, cap. iv.

[10] Questo termine è dovuto a CS Peirce.

[11] Cfr.*Rivista di Matematica*, IV. pp.??ss.; *Principi di matematica*, pag.??? (§???).

[12] Cfr.*Principi di matematica*, p.205 (§194), e riferimenti ivi contenuti.

[13] Ciò non si applica allo spazio ellittico, ma solo agli spazi in cui la retta è una serie aperta.*Matematica moderna*, a cura di JWA Young, pp.3–51(monografia di O. Veblen su "I fondamenti della geometria").

[14] Vol. iii.∗300 e segg., in particolare303.

[15] *Naturalmente ,*in pratica continueremo a parlare di una frazione come (ad esempio) maggiore o minore di 1,intendendo maggiore o minore del rapporto1/1. Finché si comprende che il

rapporto*1/1*e ilnumero cardinale1sonodiversi, non è necessario essere sempre pedanti nell'enfatizzare ladifferenza.

[16] A rigor di termini, questa affermazione, così come quelle che seguono fino alla fine del paragrafo, implica quello che viene chiamato l'"assioma dell'infinito", che verrà discusso in un capitolo successivo.

[17] *Stetigkeit und irrationale Zahlen*,□aedizione, Brunswick,

[18] Per un trattamento più completo dell'argomento dei segmenti e delle relazioni dedekindiane, vedere*Principia Mathematica*, vol. ii.∗210– 214. Per un trattamento più completo dei numeri reali, vedere*ibid*., vol. iii.

∗310 e segg ., e *Principi di matematica* , capp. xxxiii e xxxiv.

[19] Cfr.*Principi di matematica*, §360, p.379.

[20] Cfr.*Principia Mathematica*, vol. ii.∗□□□.

[21] Questa dimostrazione è tratta da Cantor, con alcune semplificazioni: vedi*Jahresbericht derDeutschenMathematiker-Vereinigung*, i.

[22] Vedi*Principia Mathematica*, vol. ii.∗230–234.

[23] Un numero si dice "numericamente minore" di*ϱ* quando è compreso tra−*ϱ* e +*ϱ*.

[24] Vedi*Principia Mathematica*, vol. i.∗□□. Anche vol. iii.∗□□□–□□□.

[25] *Mathematische Annalen*, vol. lix. pp.914–6.In questa forma ne parleremo come dell'assioma di Zermelo.

[26] Vol. i, Introduzione, cap. ii,∗12e∗20; vol. ii, Dichiarazione introduttiva.

[27] “La logica matematica basata sulla teoria dei tipi”, vol. xxx,1908, pp.222–262.

[28] “Les paradoxes de la logique”,1□□□□, pp.□□□–□□□.

[29] Bolzano,*Paradoxien des Unendlichen*,□□.

[30] Dedekind,*Was sind und was sollen die Zahlen?*No.□□.

[31] Useremo le lettere*p*,*q*,*r*,*s*,*t* per indicare le proposizioni variabili.

[32] Questo termine è dovuto a Frege.

[33] Vedi*Mind*, vol. xxi.,1912, pp.522–531; e vol. xxiii.,1914, pp.240–247.

[34] Per ragioni linguistiche, per evitare di suggerire il plurale o il singolare, è spesso conveniente dire “ϕx non è sempre falso” piuttosto che “ϕxa volte” o “ϕx a volte è vero”.

[35] Il metodo di deduzione è riportato in*Principia Mathematica*, vol. i.∗9.

[36] *Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie*,1□□□□.

[37] Le proposizioni primitive contenute nei*Principia Mathematica*sono tali da permettere l'inferenza che almeno un individuo esiste. Ma ora considero questo un difetto di purezza logica.

[38] L'importanza della "tautologia" per una definizione di matematica mi fu fatta notare dal mio ex allievo Ludwig Wittgenstein, che stava lavorando al problema. Non so se l'abbia risolto, né se sia vivo o morto.